Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Моравецька Катерина Віталіївна

УДК 517.98+515.164.17

ДИСЕРТАЦІЯ

Міри на банахових многовидах з рівномірною структурою

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
________________ К. В. Моравецька

Науковий керівник: Богданський Юрій Вікторович,
професор, доктор фізико-математичних наук

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Моравецька К. В. Міри на банахових многовидах з рівномірною структурою. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, 2018.

Робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

Дисертація присвячена диференційовним мірам на банахових многовидах з рівномірною структурою. Запропоновано конструкцію побудови асоційованих поверхневих мір на вкладених поверхнях скінченної корозмірності. Узагальнено критерій слабкої диференційовності мір на випадок диференційовності уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.

Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів розбитих на підрозділи, висновків, списку використаної літератури та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів та конференцій, на яких доповідались отримані результати.

У вступі до дисертації обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, подано короткий історичний огляд стану проблеми, виділено об'єкт, предмет та методи дослідження, сформульовано мету та завдання дослідження, висвітлено наукову новизну, а також зв'язок з науковими програмами. Крім того, наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації, виділено структуру роботи, наведено короткий зміст дисертації та перелічено основні отримані результати.

Розділ 1 присвячено огляду робіт, які мають відношення до теми дисерта-

ційного дослідження. Наведено деякі необхідні теоретичні відомості з теорії міри та диференціальної геометрії. Розглянуто клас нескінченновимірних банахових многовидів зі спеціальною структурою — банахові многовиди з рівномірною структурою, та виділено деякі їх властивості. Представлено різні існуючі підходи до означення диференційовних мір та надано огляд деяких відомих результатів з теорії диференційовних мір. Розглянуто диференційовність за Фоміним та за Скороходом, уздовж напрямків, уздовж векторних полів та за довільними вимірними перетвореннями, на лінійних просторах та нелінійних многовидах, визначено зв'язок між ними. Представлено огляд підходів до побудови поверхневих мір та поверхневого інтегрування в нескінченновимірних гільбертових просторах та нелінійних многовидах, наведено кілька варіантів узагальнення формули Гаусса-Остроградського.

У розділі 2 наведено конструкцію поверхневих мір на банахових многовидах з рівномірною структурою. Запропоновано метод побудови асоційованих мір першого та другого типу на вкладеній поверхні скінченної корозмірності.

Введено поняття вкладеної поверхні, асоційованої диференціальної форми поверхні та трансверсального (строго трансверсального) до поверхні набору векторних полів. Наведено низку прикладів та відзначено деякі елементарні властивості введених понять. Показано, що в околі поверхні многовид може бути розшарований на інтегральні криві строго трансверсального до поверхні набору векторних полів.

Для борелівської міри на банаховому многовиді з обмеженою структурою запропоновано конструкцію побудови асоційованої з нею поверхневої міри за допомогою строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, що попарно комутують. Під дією потоку вказаного набору векторних полів підмножина поверхні переходить у деякий окіл на многовиді, для якого визначено вихідну міру. Граничним переходом одержується значення бажаної поверхневої міри (першого типу).

Розглядається набір "внутрішніх околів" $S_{-\varepsilon}$ поверхні S, для якого $S_{-\varepsilon}$ монотонно зростає до S при $s \searrow 0$. Побудова поверхневої міри на поверхні S передбачає побудову узгоджених між собою поверхневих мір на множинах $S_{-\varepsilon}$. Наведено достатні умови існування поверхневої міри першого типу. Введено поняття узгодженої та узгодженої в широкому сенсі трійки $(S, \vec{Z}, \mu)$ (трійка складається з поверхні, набору векторних полів та міри), для яких визначено поверхневу міру.

Доведено деякі властивості запропонованої конструкції. Основним результатом розділу є теорема про узгодженість, згідно з якою для банахового многовиду з рівномірною структурою поверхнева міра першого типу задається однозначно асоційованою диференціальною формою поверхні і не залежить від конкретного строго трансверсального набору векторних полів, використаного при побудові. Завдяки цій властивості коректно введено поняття поверхневої міри другого типу, незалежної від набору векторних полів.

Розділ 3 присвячено вивченню транзитивних властивостей асоційованих поверхневих мір та дослідженню узгодженості запропонованої конструкції з класичними результатами. Розглянуто випадок подвійного вкладення поверхонь, тобто ситуація, коли Σ є вкладеною в M поверхнею скінченної корозмірності, а поверхня S є вкладеною у Σ. В такому разі S можна також розглядати як вкладену в M поверхню (скінченної корозмірності). Доведено, що запропонована конструкція поверхневих мір є транзитивною, тобто безпосередня побудова поверхневої міри на S при розгляді її вкладення в M призводить до того ж результату, що і двоетапна побудова через поверхневу міру на Σ.

Для випадку транзитивного вкладення поверхонь на банаховому многовиді з рівномірною структурою побудовано узгоджені між собою диференціальні форми, що відповідають вказаним вкладенням, та строго трансверсальний до поверхні Σ набір векторних полів, що попарно комутують, піднабір якого є строго трансверсальним до поверхні S.

Розглянуто два приклади застосування запропонованої конструкції поверхневих мір. Побудовано асоційовану з мірою Лебега поверхневу міру на параметрично заданій поверхні в скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^n$, що за умови нормування збігається з класичною площею. Отримано поверхневі міри першого та другого типу, асоційовані з рімановою мірою об’єму на поверхні, вкладеній у ріманів многовид з рівномірною структурою. Показано, що отримана міра співпадає з мірою об’єму поверхні, що задається індукованим тензором. Таким чином, обґрунтовано адекватність використання запропонованого підходу до побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах.

Розділ 4 присвячено дослідженню диференційовності мір уздовж векторних полів. Отримано узагальнення низки результатів з класичної теорії, яка ґрунтується на зсувах мір уздовж постійних напрямків, на випадок зсувів уздовж інтегральних кривих векторних полів.

Доведено деякі допоміжні властивості потоків обмежених векторних полів. Одержано ряд критеріїв слабкої диференційовності. Зокрема, для радонівських мір доведено критерій диференційовності через формулу інтегрування частинами, в якій похідна переноситься з функції на міру.

Основним результатом останнього розділу є критерій слабкої диференційовності міри уздовж обмеженого векторного поля, що узагальнює відомий результат В.І. Богачова, отриманий для диференційовності за напрямком на лінійному просторі. Відповідно до вказаного критерію слабка диференційовність міри μ є еквівалентною ліпшицевості всіх функції зсувів $t \mapsto \mu_t(A)$.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: банахів многовид з рівномірною структурою, борелівська міра, диференційовність мір уздовж векторних полів за Фоміним та за Скороходом, поверхнева міра, вкладена поверхня, асоційована форма поверхні, трансверсальний набір векторних полів.

ABSTRACT

Moravetska K. V. Measures on Banach manifolds with uniform structure. — Qualifying scientific work on the right of manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2018.

The work is prepared at the Department of Mathematical Methods of Systems Analysis of Institute for applied system analysis of National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute".

The thesis is devoted to differentiable measures on Banach manifolds with uniform structure. A construction of associated surface measures on embedded surfaces with finite codimension is proposed. A criterion for weak differentiability of measures is generalized to the case of differentiation along vector fields on Banach manifolds with uniform structure.

The main part of the thesis consists of an introduction, four sections divided into subsections, conclusions, list of references and an appendix with the list of the author's publications concerning the topic of the thesis and the scientific seminars and conferences, at which the obtained results were reported.

The introduction grounds the relevance of the research topic, provides short historical review of its state, highlights the object, subject and methods of the research, formulates the purpose and tasks of the research, indicates the scientific novelty, as well as the connection with scientific programs. In addition, the information where the results of the dissertation have been discussed and published is pointed out, the structure of work is highlighted, the summary of the dissertation is given and the main results obtained are listed.

Section 1 is devoted to the review of works related to the topic of the dissertation research. Some necessary theoretical information from the theory of measure and differential geometry is given. A class of Banach manifolds with a speci-

al structure, namely Banach manifolds with uniform structure is considered, and some of their properties are indicated. Various existing approaches to the definition of differentiable measures are indicated and an overview of some known results on the theory of measure differentiability is presented. The Fomin and Skorokhod differentiability along directions, along vector fields and defined by arbitrary measurable transformations, on linear spaces and nonlinear manifolds is considered, as well as the connection between them is determined. An overview of approaches to the construction of surface measures and surface integration in infinite-dimensional Hilbert spaces and nonlinear manifolds is presented, several variants of the generalization of the Gauss-Ostrogradsky formula are presented.

Section 2 presents the construction of surface measures in Banach manifolds with uniform structure. A method for constructing associate measures of the first and second type on an embedded surface of finite codimension is proposed.

The concepts of an embedded surface of finite codimension, an associated differential form of an embedded surface and a set of vector fields, transversal (strictly transversal) to the surface, are introduced. A few examples are given and some elementary properties of the introduced concepts are noted. It is shown that surface neighborhood can be bundled into integral curves of a strictly transversal to the surface set of vector fields.

For a Borel measure on a Banach manifold with bounded structure a construction of the associated surface measure on embedded surface is proposed with the usage of mutually commuting set of vector fields that are strictly transversal to the surface. Under the action of the flow of a given set of vector fields, any subset of the surface can be transformed into a certain area on a manifold for which the initial measure is determined. Passing to the limit yields the value of the desired surface measure (the first type).

We consider the set of “internal neighborhoods” $S_{-\varepsilon}$ of the surface S for which $S_{-\varepsilon}$ monotonically increases to S as s monotonically decreases to 0. Construction of a surface measure on a surface S involves the construction of coordinated surface measures on subsets $S_{-\varepsilon}$. Sufficient conditions for the existence of a first type surface measure are given. The concepts of a coherent and coherent in the broad sense triple $(S, \vec{Z}, \mu)$ are introduced (the triple consists of a surface, a set of vector fields, and measure) for which a surface measure is defined.

Some properties of the proposed construction are proved. The main result of the section is a consistency theorem, according to which in case of Banach manifold with uniform structure the first type surface measure depends only on associated differential form and does not depend on a specific strictly transversal set of vector fields used during construction. Due to this property, the concept of surface type of the second type, independent of a set of vector fields, is correctly introduced.

Section 3 deals with the study of the transitive properties of associated surface measures and the study of the coherence of the proposed construction with classical results. The case of double embedding of surfaces is considered, that is, the situation when the Σ is an embedded into M surface of finite codimension and the surface S is embedded into Σ. In this case, S can also be regarded as a surface (with finite codimension) embedded in M. It is proved that the proposed construction of surface measures is transitive, that is, the direct construction of the surface measure on S when considering its embedding in M leads to the same result as the two-stage construction with the surface measure on Σ.

For the case of a transitively embedded surfaces in a Banach manifold of uniform structure, there are constructed concerted associated differential forms corresponding to the specified embeddings and strictly transversal to the surface set of vector fields that are pairwise commutated and from which such subset can be taken that is strictly transversal to the surface.

Two examples of the usage of proposed construction of associated surface measures are considered. The surface measure associated with the Lebesgue measure is constructed on a parametrically defined surface in a finite-dimensional space $\mathbb{R}^n$, which, in the case of normalization, coincides with the classical area. For the Riemann volume measure on a Riemann manifold with uniform structure first and second type associated surface measures are obtained for embedded Riemann submanifold. It is shown that the obtained measure coincides with the volume measure on the surface given by the induced tensor. Thus, the adequacy of the proposed approach to the construction of surface measures on finite-dimensional surfaces in infinite-dimensional spaces is substantiated.

Section 4 is devoted to the study of the measure differentiability along vector fields. Plenty of results from the classical theory, which is based on measure shifts along constant direction, is generalized to the case of shifts along integral curves of vector fields.

Some auxiliary properties of flows of bounded vector fields are proved. Few criterions for weak differentiability are obtained. In particular, for the Radon measure, the criterion of differentiability through the integration by parts formula is obtained, where the derivative is transferred from function to measure.

The main result of the last section is the criterion of weak measure differentiability along bounded vector field, which generalizes the known result of V. I. Bogachev, obtained for directional differentiability on a linear space. In accordance with this criterion, the weak differentiability of the measure μ is equivalent to the Lipschity of all shift functions $t \mapsto \mu_t(A)$.

Appendix contains applicant's publications list concerning the topic of the thesis and informs where the results of the dissertation have been reported and discussed.

KEYWORDS: Banach manifold with uniform structure, Borel measure, Fomin and Skorokhod measure differentiability along vector fields, surface measure, embedded surface, associated surface form, transversal set of vector fields.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації.

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 наукових статей у фахових виданнях (3 з яких опубліковано у журналі, що індексується наукометричною базою Scopus) та 3 роботи у матеріалах наукових конференцій, дві з яких є міжнародними.

1. Моравецька К. В. Диференційовність борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою // Укр. мат. журн. — 2016. — т.68, № 10. — С. 1348–1364.
2. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 8. — С. 1030–1048.
3. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 10. — С. 1299–1309.
4. Моравецька К. В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2017, № 4. — С. 66–72.
5. Моравецька К. В. Конструкція поверхневих мір на поверхнях, укладених у ріманові багатовиди з рівномірною структурою // Сист. досл. та інф. техн. — 2017, № 4. — С. 130–138.
6. Моравецька К. В. Критерій слабкої диференційовності мір вздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року, Київ : ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2014. с. 126.
7. Моравецкая Е. В. Слабая дифференцируемость борелевских мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації : матеріали Всеукраїнської заочної

науково-практичної конференції “Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації”, м. Харків, 26–27 грудня 2016 року / Наукове партнерство “Центр наукових технологій”. – Харків : НП “ЦНТ”, 2016. С. 45–49.

8. Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року, Київ : НТУУ “КПІ”, 2017. т. 1. С. 176–180.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел;
$C_b(M)$	простір дійснозначних неперервних обмежених функцій на просторі M;
$C_b^{\mathbb{C}}(M)$	простір комплекснозначних неперервних обмежених функцій на просторі M;
ρ_M	метрика в метричному просторі M;
$B_\varepsilon^M(x)$	відкрита куля в метричному просторі M з центром у точці $x \in M$ та радіусом ε ($\{y \in M \mid \rho_M(x,y) < \varepsilon\}$);
$\overline{B}_\varepsilon^M(x)$	замкнена куля в метричному просторі M з центром у точці $x \in M$ та радіусом ε ($\{y \in M \mid \rho_M(x,y) \leqslant \varepsilon\}$);
B_ε^E та $\overline{B}_\varepsilon^E$	відкрита та замкнена кулі з центром в нулі в банаховому просторі E;
$B_\varepsilon^M(A)$, $B_\varepsilon(A)$ або A_ε	окіл множини A в метричному просторі M радіусу ε ($\bigcup\limits_{x \in A} B_\varepsilon^M(x)$);
$\mathcal{L}^p(\mu)$	клас функцій, інтегровних за Лебегом в степені p за мірою μ;
$\mathcal{B}(M)$	σ-алгебра борелівських підмножин простору M;
$C_b^p(M)$	клас обмежених тензорних полів степеня гладкості p на банаховому многовиді M з обмеженою структурою;

ВСТУП

Дисертація присвячена дослідженню мір на гладких нескінченновимірних многовидах.

Актуальність теми.

Потреба узагальнення понять класичного аналізу на випадок функцій нескінченного аргументу і пов'язані з ними об'єкти виникла цілком природно у зв'язку з розвитком математичної фізики, зокрема, варіаційного числення. Це призвело до виникнення такої математичної дисципліни як нескінченновимірний аналіз. Незважаючи на те, що на початкових етапах перенесення понять аналізу на нескінченновимірний випадок відбувалося без особливих складностей (диференціальне числення, деякі прості задачі теорії диференціальних рівнянь), виявилося, що при переході до інтегрування і теорії диференціальних рівнянь математичної фізики, при вивченні яких необхідне інтегрування, виникають серйозні труднощі.

Плідним виявився напрям в теорії інтегрування, пов'язаний з розвитком теорії випадкових процесів, починаючи з робіт Н. Вінера і А.Н. Колмогорова. Особливості інтегрування у функціональних просторах розглядаються у роботах Р. Камерона і В. Мартіна, присвячених теорії вінерівських інтегралів. Нескінченновимірні диференціальні рівняння також виникають у теорії випадкових процесів (наприклад, при вивченні так званих статистичних розв'язків еволюційних рівнянь класичної математичної фізики, починаючи з роботи Є. Хопфа).

Іншим поштовхом для розвитку нескінченновимірного аналізу були роботи Фейнмана з квантової механіки та електродинаміки, в яких був введений і використаний широковідомий тепер "інтеграл Фейнмана". Але, як це часто буває у фізиці, зроблено це було без необхідного математичного обґрунтування. З іншого боку в роботах Ю. Швінгера з квантової електродинаміки з'явилися рівняння у функціональних похідних, які також потребували для свого дослідження розвитку процедур інтегрування в функціональних просторах. Іншим джерелом рівнянь в функціональних похідних були також роботи Є. Хопфа зі статистичної гідродинаміки. Все це створило серйозні передумови для математичного розвитку нескінченновимірного аналізу.

Важливим фактом, що визначає актуальність теорії міри в рамках нескінченновимірного аналізу, стала особлива роль мір в нескінченновимірному аналізі. Виявилося, що в нескінченновимірному просторі відсутня стандартна міра типу міри Лебега (тобто ненульова міра, яка є інваріантною відносно зсувів), а тому немає канонічного способу ототожнення мір з узагальненими функціями за рахунок представлення їх щільностями відносно міри Лебега. Таким чином, якщо у скінченновимірному випадку диференціальні властивості мір описуються в термінах щільностей мір відносно міри Лебега, то у нескінченновимірному такої можливості немає. В зв’язку з цим виникає необхідність розглядати одночасно і простір функцій, і простір мір окремо, а отже, виникає необхідність побудови аналізу мір, паралельного до аналізу функцій. Таким чином, теорія мір стає дуже актуальним напрямком для розвитку науки, і природним є виникнення теорії диференційовності мір та поверхневого інтегрування. Основна ідея теорії диференційовних мір полягає у перенесенні дії диференціальних операторів безпосередньо на міри, завдяки чому можна отримати нескінченновимірний аналог формули інтегрування частинами.

Теорія диференційовних мір вперше була запропонована С.В. Фоміним на Міжнародному конгресі математиків у Москві в 1966 році в якості кандидату на роль нескінченновимірного аналогу теорії представлень Соболева-Шварца, і після цього отримала широкий розвиток. Перше детальне дослідження диференційовних мір на лінійних просторах було проведено В.І. Авербухом, О.Г. Смоляновим, С.В. Фоміним у роботах [1, 2]. Інше означення диференційовності мір було введене А.В. Скороходом у книзі [39]. Основні результати всіх цих досліджень коротко викладені в книгах О.Г. Смолянова [40] та Ю.Л. Далецького, С.В. Фоміна [21]. В 70–80-х роках значний розвиток ця тематика отримала в роботах школи О.Г. Смолянова. Огляд основних досягнень теорії диференційовних мір за перше двадцятиліття її існування зроблено у статті В.І. Богачова та О.Г. Смолянова [4]. Деякі застосування вказаної теорії наведено у книгах Н.В. Норіна [53] та А.В. Угланова [56]. Загалом, з теорії диференційовних мір і її застосувань опубліковано сотню робіт. Детальний виклад результатів, пов'язаних з диференціальними властивостями мір на нескінченновимірних просторах, наведено у монографії В.І. Богачова [5].

Вихідною ціллю для розвитку теорії диференційовних мір С.В. Фоміним був розвиток теорії псевдодиференціальних операторів для нескінченновимірних диференціальних рівнянь. Однак, як це часто буває з плідними ідеями, теорія диференційовних мір швидко переросла первинні рамки і стала ефективним знаряддям в широкому колі різноманітних застосувань, таких як стохастичний аналіз, квантова теорія поля та нелінійний аналіз. На сьогоднішній день вона стрімко розвивається та являю собою область, багату на цікаві проблеми, важливі для проникнення в сутність нескінченновимірних явищ.

Проблема побудови поверхневих мір на поверхнях, вкладених у нескінченновимірний простір, є одним з ключових питань нескінченновимірного аналізу. Необхідність теорії інтегрування викликана потребами теоретичної фізики та випадкових процесів, однак складність обумовлена неможливістю використання класичних підходів скінченновимірного аналізу. Застосування теорії інтегрування є в багатьох областях, зокрема, у теорії нескінченновимірних розподілів і диференціальних рівнянь, випадкових процесах, варіаційному численні. Перші, початкові кроки в вирішенні даної задачі були запропоновані А.В. Скороходом у роботі [39]. В роботах А.В. Угланова ([42, 56] та ряд інших робіт) був розвинений апарат поверхневого інтегрування в просторах Фреше. Інший підхід до побудови поверхневий мір було запропоновано у роботах В.І. Богачова та О.В. Пугачова [37, 48]. Ю.В. Богданським у роботі [9] розглянуто ще один спосіб побудови поверхневих мір для поверхні, вкладеної в банахів многовид.

У сучасному аналізі як по внутрішнім причинам, так і під стимулюючим впливом теоретичної фізики все більшу роль відіграють нелінійні многовиди. Змістовні аналітичні побудови на них є неможливими без теорії інтегрування, тою чи іншою мірою пов'язаною з додатковими структурами. І якщо у випадку нескінченновимірного лінійного простору з використанням гауссівських мір вдається побудувати ослаблений варіант гармонічного аналізу, на нелінійних многовидах немає і такої можливості. В зв'язку з цим виникає необхідність опису достатньо широкого класу мір, властивості яких були б узгодженими з гладкою структурою многовиду, а також алгебраїчними структурами, що, можливо, на ньому наявні. Таким класом є міри, диференційовні уздовж векторних полів. Вивчення їх властивостей являє собою важливу задачу.

Банахові многовиди з рівномірною структурою, що розглядаються у дисертації, природним чином виникають у нескінченновимірному аналізі та стохастичній диференціальній геометрії при побудові глобальних розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь ([20]). Наявність вказаної структури дозволяє переносити на нескінченновимірний випадок базові результати класичного аналізу (див. [9]). У роботі [49] подібне означення розглядається і для випадку Ріманових многовидів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" в рамках ініціативної теми «Застосування математичних методів в дослідженні інтегральних характеристик детермінованих та стохастичних складних систем» (номер державної реєстрації 0118U003669).

Об'єкт дослідження. Борелівські міри на банахових многовидах з обмеженою структурою.

Предмет дослідження. Диференціальні властивості борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей борелівських мір на банахових многовидах з обмеженою структурою. Поставлена мета включая в себе виконання таких завдань:

– Дослідити поняття неперервності та диференційовності борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.
– Узагальнити на вказаний випадок критерій слабкої диференційовності В.І. Богачова.
– Запропонувати альтернативний метод побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у нескінченновимірний банахів многовид з обмеженою структурою.
– Встановити достатні умови для існування асоційованої поверхневої міри.
– Дослідити транзитивні властивості запропонованої конструкції.
– Обґрунтувати адекватність конструкції на прикладі скінченновимірних просторів та показати її узгодженість із класичними результатами.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного і функціонального аналізу, диференціальних рівнянь, теорії міри та диференціальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

– Отримано узагальнення критерію слабкої диференційовності за напрямком В.І. Богачова для випадку диференційовності уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.
– Запроваджено поняття асоційованої диференціальної форми та строго трансверсального набору векторних полів для поверхонь скінченної ко-

розмірності, що вкладені у банахові многовиди з обмеженою структурою.

- Запропоновано метод побудови асоційованих поверхневих мір першого та другого типів. Виявлено достатні умови існування відповідної поверхневої міри.
- Доведено теорему “про узгодженість”, тобто однозначність задання поверхневої міри другого типу асоційованою диференціальною формою, незалежно від набору векторних полів, використаних при побудові.
- Показано транзитивність асоційованих поверхневих мір. Показано, що при подвійному вкладенні поверхні S у многовид M (S вкладена у Σ, що в свою чергу вкладена у M) безпосередня побудова поверхневої міри на S при розгляді її вкладення в M призводить до того ж результату, що і двоетапна побудова через поверхневу міру на Σ.
- Обґрунтовано адекватність запропонованої конструкції на прикладі скінченновимірного простору та ріманова многовиду.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть мати подальше використання в різних розділах теорії міри та диференцільної геометрії.

Особистий внесок здобувача. Постановка задачі, визначення напрямку та плану дослідження належить науковому керівнику здобувача доктору фіз.-мат. наук, професору Ю. В. Богданському. За результатами дисертації автором опубліковано 5 робіт [13], [15], [34], [33], [35], з них [13] та [15] у співавторстві з науковим керівником. У спільних роботах особисті внески співаторів є рівноцінними.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на наукових конференціях та семінарах:

- Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року;

– Шістнадцята міжнародна науково-технічна конференція SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року;
– конференція в рамках II туру Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з математичних наук, м. Івано-Франківськ, 20–22 березня 2014 року;
– Науковий семінар “Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник: проф. А.А. Дороговцев), 23 лютого 2016 року;
– Науковий семінар “Алгебра і аналіз” ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ” (керівник: проф. Ю. В. Богданський);
– Науковий семінар кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (керівник: д. ф.-м. н., проф. А. В. Загороднюк), 28 листопада 2018 року;

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 наукових статей [13], [15], [34], [33], [35] у фахових виданнях та 3 роботи [14], [32], [36] у матеріалах наукових конференцій, дві з яких є міжнародними. Статті [13], [15] та [34] опубліковано у журналі, який включено до наукометричної бази Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Основний текст дисертації складає 173 сторінки друкованого тексту, перелік використаних джерел налічує 56 посилань.

Подяка. Автор висловлює подяку своєму науковому керівникові Ю.В. Богданському за постановку задачі та цінні поради.

Короткий зміст дисертації

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету роботи, визначено завдання і методи дослідження, висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Розглянуто структуру роботи і коротко викладено зміст основної частини роботи, а також наведено інформацію щодо апробації результатів та публікацій за темою дисертації.

У **першому розділі** проведено огляд літератури за темою дисертаційної роботи. Розглянуто клас банахових многовидів зі спеціальною рівномірною структурою. Наведено основні означення та властивості з теорії диференційовних мір та вказано різні підходи до визначення диференційовних мір. Наведено огляд підходів до побудови поверхневих мір в нескінченновимірних просторах.

Означення 1.1. *Атлас* $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ *на банаховому многовиді* M *називається обмеженим, якщо існує число* $K > 0$ *таке, що відображення склейки* $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *для кожної пари карт атласа задовольняє умову:*

$$x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \big\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})'(x)\big\| \leqslant K, \\ \big\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})''(x)\big\| \leqslant K. \end{cases}$$

Означення 1.3. *Обмежений атлас* Ω *називається рівномірним, якщо існує таке* $r > 0$*, що для будь-якої точки* $p \in M$ *існує така карта* $(U, \varphi) \in \Omega$*, що* $\varphi(U)$ *містить кулю в* E *з центром в* $\varphi(p)$ *радіуса* r.

Другий розділ присвячено поверхневим мірам на поверхнях скінченної корозмірності на банахових многовидах з рівномірною структурою. Запропоновано метод побудови асоційованої міри на поверхні скінченної корозмірності за допомогою строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, які попарно комутують. Під дією потоку вказаного набору векторних полів поверхня переходить у деякий окіл на многовиді, для якого визначено вихідну міру. Граничним переходом одержується значення бажаної поверхневої міри.

Розглядаються обмежені тензорні поля T на M, тобто такі, для яких існує число $C > 0$, що задовольняє умову:

$$\big((U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega;\ x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)\big) \Longrightarrow \Big(\big\|T_\alpha(x)\big\| \leqslant C;\ \big\|T'_\alpha(x)\big\| \leqslant C\Big).$$

Якщо задано два банахові многовиди M_1 та M_2 з обмеженими атласами Ω_1 та Ω_2 відповідно, то можна розглядати обмежені морфізми, тобто такі функції $f\colon M_1 \to M_2$, для яких існує таке число $C > 0$, що для кожної пари карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ та $(V, \psi) \in \Omega_2$ виконується умова:

$$\begin{cases} p \in U, \\ f(p) \in V. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'\big(\varphi(p)\big)\Big\| \leqslant C, \\ \Big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})''\big(\varphi(p)\big)\Big\| \leqslant C. \end{cases}$$

Введено поняття вкладеної поверхні, асоційованої форми поверхні та трансверсального (строго трансверсального) до поверхні набору векторних полів.

Нехай M є зв'язним банаховим многовидом класу C^2, наділеним обмеженою структурою. Через T_xM позначатитемо дотичний простір до M в точці $x \in M$.

Означення 2.1. *Підмножину $S \subset M$ назвемо (вкладеною) поверхнею в M скінченної корозмірності m, якщо існує многовид N з обмеженою структурою, модельним простором якого є підпростір E_1 в E корозмірності m, відкритий окіл V нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ та обмежений ізоморфізм $g\colon N \times V \to U \subset M$ на відкриту підмножину U в M, для якого $g\big(N \times \{\vec{0}\}\big) = S$.*

Означення 2.2. *Нехай S — поверхня в M корозмірності m; $g\colon N \times V \to$ $\to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення поверхні S в M; ω — диференціальна m-форма класу C_b^1, визначена на U (або на більшій відкритій підмножині в M). Нехай для будь-якої точки $x \in S$ простір T_xS є асоційованим підпростором зовнішньої форми $\omega(x)$ в просторі T_xM $\Big($інакше кажучи, $T_xS = \big\{Y \in T_xM \mid i_Y\omega(x) = 0\big\}$, де i_Y — внутрішній добуток зов-*

нішньої форми $\omega(x)$ на вектор $Y\Big)$. Додатково припускаємо, що для деякого (а тому і для будь-якого еквівалентного) обмеженого атласу Ω на M, підпорядкованого даній обмеженій структурі, виконується умова: існує $\alpha > 0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in (0, \alpha)$ можна знайти $\delta > 0$, для якого для будь-яких $x \in S_{-\varepsilon}$ і карти $(U, \varphi) \in \Omega$ в точці x (т.е. $x \in U$) для представлення ω в цій карті має місце нерівність $\Big\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\Big\| \geqslant \delta$. Тоді форму ω назвемо асоційованою формою поверхні S.

Означення 2.3. *Набір векторних полів $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2 \ldots, Z_m\}$ назвемо трансверсальним до S, якщо для кожної точки $x \in S$ має місце нерівність: $\omega(\vec{Z})(x) := \omega(Z_1, \ldots, Z_m)(x) \neq 0$ і строго трансверсальним до S, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in (0, \alpha)$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in S_{-\varepsilon}$ має місце нерівність: $\big|\omega(\vec{Z})(x)\big| \geqslant \delta$.*

Наступна лема гарантує коректність останнього означення.

Лема 2.1. *Означення трансверсальності та строгої трансверсальності до S набору векторних полів $\vec{Z}$ не залежить від вибору асоційованої форми ω поверхні S.*

Для поверхні S розглядаються "внутрішні околи" $S_{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$:

$$S_{-\varepsilon} = \big\{x \in S \mid \rho(x, M \backslash U) \geqslant \varepsilon\big\}.$$

Тоді множини $S_{-\varepsilon}$ збігають до S при $\varepsilon \searrow 0$ (тобто утворюють направленість вкладених множин, для яких $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} = S$). Таким чином для побудови поверхневої міри на S достатньо побудувати узгоджені між собою міри на множинах $S_{-\varepsilon}$.

Позначимо через $\Phi_t^X = \Phi^X(t; \cdot)$ потік векторного поля X (визначений локально) і для набору векторних полів $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2 \ldots, Z_m\}$, що попарно комутують, для $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ покладемо: $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} := \Phi_{t_1}^{Z_1} \Phi_{t_2}^{Z_2} \ldots \Phi_{t_m}^{Z_m}$ (значення $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}$ не залежить від порядку множників завдяки комутації). Покладемо також $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \mid x \in A\}$, $\Phi_W^{\vec{Z}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \mid \vec{t} \in W; x \in A\}$.

Наступні два результати показують, що під дією сумісного потоку строго трансверсального до S набору векторних полів, що попарно комутують, при малих r множина $B_r \times S_{-\varepsilon}$ гомеоморфно відображується в область на многовиді M (тут і далі через B_r позначено відкриту кулю радіусу r в $\mathbb{R}^m$ з центром в нулі).

Теорема 2.1. *Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає S. Нехай набір $\vec{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ векторних полів класу $C_b^1(U)$, що попарно комутують, є строго трансверсальним до поверхні S. Крім того нехай для заданого $\varepsilon > 0$ існують такі $r_0 > 0$ та $r_1 > 0$, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}$ є визначеним на $B_{r_1}(S_{-\varepsilon}) \times B_{r_0}$. Тоді існує окіл $W = W(\varepsilon)$ нуля в $\mathbb{R}^m$ такий, що:*
а) відображення $\Phi^{\vec{Z}}\colon S_{-\varepsilon} \times W \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in \Phi^{\vec{Z}}_W S_{-\varepsilon}$ взаємно однозначне;
б) існує окіл W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для якого $\Phi^{\vec{Z}}_W S_{-\varepsilon} \supset g(N_{-2\varepsilon} \times W_1)$.

Лема 2.6. *Нехай $\varepsilon > 0$ і відображення $\Phi\colon S_{-\varepsilon} \times W \to \Phi^{\vec{X}}_W S_{-\varepsilon} \subset U$ побудовано згідно з теоремою 2.1. Тоді існує таке $p > 0$, що $\overline{B}_{2p} \subset W$ і відображення $\Psi = \Phi\big|_{S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p}\colon S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p \to \Phi^{\vec{X}}_{\overline{B}_p} S_{-\varepsilon}$ — гомеоморфізм $S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p$ на замкнену підмножину многовиду M.*

Якщо μ — скінченна борелівська міра на M, то для кожної борелівської множини $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ можна розглянути міру w_A на $\mathcal{B}(\overline{B}_p)$, визначену формулою:

$$w_A(B) = w_A^{\vec{X}}(B) = \mu(\Phi^{\vec{X}}_B A),$$

а для кожної множини $B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)$ розглянути міру ν_B на $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, визначену рівністю:

$$\nu_B(A) = w_A(B) = \mu(\Phi^{\vec{X}}_B A).$$

Нехай λ_m — інваріантна міра Лебега на $\mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$. Розглянемо границю:

$$\frac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0}) := \lim_{r \to 0} \frac{w_A(B_r)}{\lambda_m(B_r)} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \nu_{B_r}(A). \tag{1}$$

Якщо вказана границя існує для кожного $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, тоді вона задає скінченну борелівську міру $\sigma_{\vec{X},\varepsilon}$ на $S_{-\varepsilon}$. Оскільки значення $\sigma_{\vec{X}}(A)$ не залежить від $\varepsilon > 0$, міри $\sigma_{\vec{X},\varepsilon}$ коректно продовжуються до (не обов'язково скінченної) міри $\sigma_{\vec{X}}$ на $\mathcal{B}(S)$.

Означення 2.4. *Міру $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{X}}[\mu]$, що визначається рівністю* (1) *назвемо поверхневою мірою першого типу на S (що породжена набором полів $\vec{X}$).*

Наступна теорема встановлює достатні умови існування поверхневої міри першого типу.

Теорема 2.2. *Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m, і $g\colon N \times V \to U \subset M$ — відповідний обмежений ізоморфізм; $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на U або на більшій відкритій підмножині $\widetilde{U} \subset M$ повних векторних полів класу C_b^1, що попарно комутують. Крім того, покладемо відображення $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^m \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$ взаємно однозначним. Нехай μ — скінченна борелівська міра на M, і для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \ldots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \ldots d_{Z_{k_s}} \mu$ (на області визначення векторних полів з набору $\vec{Z}$). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ існує границя, визначена формулою* (1).

Будемо називати трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгодженою, якщо вона задовольняє умови теореми 2.2.

Означення 2.5. *Трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$ будемо називати узгодженою, якщо:*

- S — вкладена в $U \subset M$ поверхня корозмірності m;

- $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(\widetilde{U})$, де $U \subset \widetilde{U} \subset M$. При цьому поля з набору $\vec{Z}$ є повними та попарно комутують, і крім того відображення потоку $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^m \to \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$ взаємно однозначне;

- μ — скінченна борелівська міра на M (або хоча б на $\widetilde{U}$), для якої для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \ldots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \ldots d_{Z_{k_s}} \mu$ на $\mathcal{B}(\widetilde{U})$.

У випадку узгодженої трійки для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S)$ має місце рівність:

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1} d_{X_2} \dots d_{X_m} \mu)(\widehat{A}), \qquad \text{де } \widehat{A} = \Phi_C^{\vec{X}} A; \;\; C = \bigtimes_{k=1}^{m} (-\infty, 0],$$

звідки випливає обмеженість варіації міри $\sigma_{\vec{X}}$ на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$.

Будемо розглядати також узгоджені в широкому сенсі трійки, які не обов'язково задовольняють умови теореми 2.2, проте для них визначено поверхневу міру.

Означення 2.6. *Трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$, в якій строго трансверсальний до S набір векторних полів, що попарно комутують, визначено при кожному $\varepsilon > 0$ лише на деякому околі поверхні $S_{-\varepsilon}$ (вимога повноти полів відсутня), але існують такі $r_0(\varepsilon) > 0$ та $r_1(\varepsilon) > 0$, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}$ є визначеним на $(S_{-\varepsilon})_{r_1(\varepsilon)} \times B_{r_0(\varepsilon)}$ і при цьому для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ визначено границю* (1)*, а тому і відповідну міру $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$, назвемо узгодженою в широкому сенсі.*

Далі передбачається, що міра μ є невід'ємною.

Нехай f — обмежена борелівська функція на S і $\varepsilon > 0$. Тоді функція $\widehat{f}$, отримана продовженням f першим інтегралом кожного векторного поля Z_k на деякий окіл $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$, належить до класу C_b^1. Наступна лема показую, що при домноженні векторних полів на функцію $\widehat{f}$ відповідна поверхнева міра домножується на f^m (похідна Радона-Нікодима).

Лема 2.8. *Нехай трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена в широкому сенсі; функція $\widehat{f}$ належить до класу C_b^1; $\widehat{f}\big|_S = f$ і для кожного $\varepsilon > 0$ функція $\widehat{f}$ є першим інтегралом векторних полів Z_k системи $\vec{Z}$ в деякому околі $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$; $\inf\limits_S f > 0$. Тоді трійка $(S, \widehat{f}\vec{Z}, \mu)$ узгоджена в широкому сенсі і виконується рівність*

$$\sigma_{\widehat{f}\vec{Z}}[\mu] = f^m \cdot \sigma_{\vec{Z}}[\mu].$$

Основним результатом розділу є наступна теорема, згідно з якою поверхнева міра першого типу не залежить від вибору строго трансверсального набору векторних полів $\vec{X}$, використаного при обчисленні границі, а лише від значень $\left|\omega(\vec{X})\right| \Big|_S$.

Теорема 2.3. *Нехай на M задано рівномірний атлас Ω; ω — асоційована m-форма поверхні S, вкладеної в M; трійки $(S, \vec{Y}, \mu)$ і $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджені. Нехай $\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S = \left|\omega(\vec{Y})\right| \Big|_S$. Тоді $\sigma_{\vec{Y}} = \sigma_{\vec{Z}}$.*

Твердження теореми 2.3 залишається вірним також у тому випадку, коли трійки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ і $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ узгоджені в широкому сенсі і при цьому міри $\sigma_{\vec{Y}}$ і $\sigma_{\vec{Z}}$ є скінченними на S.

Нехай трійки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ та $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ узгоджені. Тоді відповідно до останньої теореми міри $\dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Y})\right| \Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Y}}$ і $\dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Z}}$ співпадають на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Тим самим можливим стає введення поняття поверхневої міри другого типу, яка залежить лише від асоційованої форми поверхні, та не залежить від вибору строго трансверсального до поверхні набору векторних полів.

Означення 2.7. *Поверхневою мірою другого типу на S, індукованою мірою μ і асоційованою формою ω, назвемо міру $\mu_\omega = \dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Z}}$, де $\vec{Z}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(M)$, які попарно комутують і для яких трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена.*

Наступні два приклади гарантують існування асоційованої форми та строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, що попарно комутують. Таким чином, використання запропонованої конструкції є можливим для будь-якої вкладеної поверхні скінченної корозмірності і достатньо гладкої міри.

Приклад 2.1. *Нехай $g\colon N \times V \to g(N \times V) = U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладену поверхню S корозмірності m. Нехай B_r — куля радіусу $r > 0$ з центром в $\vec{0}$, компактно вкладена в V ($\overline{B}_r \subset V$); h — неперервно диференційовна функція на V, для якої $h(\vec{0}) \neq 0$, $h(\vec{v}) = 0$ для $\vec{v} \notin B_r$. Нехай P_2 — проекція $N \times V$ на V. Тоді визначена на U m-форма $\omega =$*

$= \left(g^{-1}\right)^* P_2^*(h\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m)$ *задовольняє всі умови* m*-форми, асоційованої з поверхнею* S.

Приклад 2.2. *Нехай* $g\colon N \times V \to U \subset M$ *— обмежений ізоморфізм, який визначає* S*, і нехай куля* $W = B_r \subset \mathbb{R}^m$ *компактно вкладена в* V*. Відображення* $f\colon \vec{s} \mapsto \dfrac{2r}{\pi} \cdot \dfrac{\operatorname{arctg}\|\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}\vec{s}$ *(*$\vec{s} \neq 0$*),* $h(\vec{0}) = \vec{0}$ *дифеоморфно відображує* $\mathbb{R}^m$ *на кулю* $W = B_r(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^m$*. Нехай* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *— векторні поля на* W*,* f*-зв'язані з полями* $\dfrac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial s_m}$ *на* $\mathbb{R}^m$*, а поля* $\eta_1, \ldots, \eta_m$ *на* V *отримані продовженням полів* ξ_k *нулем ззовні* W*. Якщо* $P\colon N \times V \to V$ *— проекція на другий множник, то поля* $Y_1, \ldots, Y_m$ *на* $N \times V$*,* P*-зв'язані з полями* $\eta_1, \ldots, \eta_m$*, попарно комутують та утворюють строго трансверсальний набір до поверхні* $N \times \{\vec{0}\}$*. Тоді набір векторних полів* $Z_1, \ldots, Z_m$*,* g*-зв'язаних з* $Y_1, \ldots, Y_m$*, задовольняє вимоги, накладені на систему полів в теоремі 2.2.*

Третій розділ присвячено вивченню транзитивних властивостей асоційованих поверхневих мір та дослідженню узгодженості запропонованої конструкції з класичними результатами. Розглядається випадок подвійного вкладення поверхонь, тобто ситуація, коли поверхня Σ вкладена в M, а поверхня S вкладена у Σ. В такому разі S можна також розглядати як вкладену в M поверхню (скінченної корозмірності). Показано, що поверхневу міру на S можна будувати як вкладенням S в M безпосередньо, так і в два етапи, будуючи спочатку поверхневу міру на Σ, а потім асоційовану з нею поверхневу міру на S. Обидва підходи призводять до еквівалентних результатів. Розглянуто два приклади застосування конструкції поверхневих мір та показано її адекватність класичним результатам. Побудовано міру, асоційовану з мірою Лебега, на поверхні, вкладеній у скінченновимірний простір $\mathbb{R}^n$, а також поверхневу міру, асоційовану з мірою об'єму, на поверхні, вкладеній у ріманів многовид.

Нехай M — банахів многовид з рівномірною структурою. Вважаємо, що $\Sigma \subset M$ — вкладена в M поверхня корозмірності m, $g_1\colon N_1 \times V_1 \to U \subset M$ — відповідний ізоморфізм, для якого $\Sigma = g_1\big(N_1 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^m}\}\big)$. Нехай тепер S — вкладена в Σ поверхня корозмірності n, $g_2\colon N_2 \times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$ — відповідний ізоморфізм, $S = g_2\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}\big)$. Тоді S також являє собою вкладену в M поверхню корозмірності $m+n$, відповідний ізоморфізм позначатитемо через $h\colon N_2 \times V_2 \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$, причому $S = h\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^{m+n}}\}\big)$ і $\Sigma \bigcap \widetilde{U} = U_1$.

Наступний результат встановлює зв'язок між асоційованими формами вкладень Σ в M, S в Σ та S в M.

Лема 3.1. *Нехай α — асоційована m-форма вкладення поверхні Σ в M, а β — диференціальна n-форма класу C_b^1 на $\widetilde{U}$, обмеження якої $\widetilde{\beta}$ на $\Sigma \bigcap \widetilde{U} = U_1$ збігається з асоційованою n-формою вкладення поверхні S в Σ. Тоді визначена на $\widetilde{U}$ диференціальна $(m+n)$-форма $\omega = \alpha \wedge \beta$ є асоційованою формою вкладення S в M.*

Підмножина $U_1 \subset \Sigma$ також являє собою вкладену в M поверхню, і відповідний ізоморфізм $g_1\colon \widetilde{N_1} \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$ є звуженням g_1 на множину $\widetilde{N_1} \times V_1$, де $\widetilde{N_1} \times \{\vec{0}\} = (g_1)^{-1}(U_1) \subset N_1 \times \{\vec{0}\}$. При цьому асоційованість форм і строга трансверсальність наборів векторних полів зберігається.

Будуємо такий строго трансверсальний до S (при вкладенні в M) набір повних векторних полів $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_{m+n}\}$ класу $C_b^1(\widetilde{U})$, що попарно комутують, для якого виконується умови:

1) поля $X_1, \ldots, X_n$ є дотичними до поверхні U_1;

2) піднабір полів $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до U_1;

3) набір $\vec{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ обмежень на U_1 полів X_k, $k \leqslant n$, строго трансверсальний до S при її вкладенні в Σ;

4) відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}\colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \to \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\mathbb{R}^m}\Sigma$ взаємно однозначне.

Наступні два результати показують транзитивність асоційованих поверхневих мір першого та другого типів.

Теорема 3.1. *Нехай $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_{m+n}\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на U повних полів класу C_b^1, що попарно комутують, причому поля $X_1, \ldots, X_n$ є дотичними до поверхні Σ, а піднабір полів $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до Σ, і при цьому відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}\colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \to \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\mathbb{R}^m}\Sigma$ взаємно однозначне. Крім того, набір $\vec{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$*

обмежень на Σ векторних полів X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) класу C_b^1 є строго трансверсальним до S при її вкладенні в Σ. Тоді, якщо трійка $(S, \vec{X}, \mu)$ є узгодженою, то узгодженими є також трійки $(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu)$ та $(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}})$ (при вкладенні S в Σ), і при цьому

$$\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}].$$

Теорема 3.2. *Нехай в умовах леми 3.1 m-форма α є замкненою. Тоді $\mu_{\alpha\wedge\beta} = (\mu_\alpha)_{\widetilde{\beta}}$.*

При побудові асоційованих поверхневих мір похідна Радона-Нікодима зберігається, що стверджується у наступній лемі.

Лема 3.3. *Нехай трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена; функція $\widehat{f}$ визначена в області, де задані векторні поля з набору $\vec{Z}$, і належить до класу C_b^1; $\widehat{f}$ є першим інтегралом полів Z_k набору $\vec{Z}$ і $\widehat{f}\big|_S = f$. Тоді трійка $(S, \vec{Z}, \widehat{f} \cdot \mu)$ узгоджена і має місце рівність:*

$$\sigma_{\vec{Z}}[\widehat{f} \cdot \mu] = f \cdot \sigma_{\vec{Z}}[\mu]. \tag{2}$$

Якщо ж трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ є узгодженою в широкому сенсі, а функція $\widehat{f}$ визначена і належить до класу C_b^1 лише в околах вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$, тоді трійка $(S, \vec{Z}, \widehat{f} \cdot \mu)$ також є узгодженою в широкому сенсі і виконується рівність (2).

Адекватність конструкції поверхневих мір підтверджується на прикладі вкладеної в $\mathbb{R}^m$ поверхні S корозмірності $k < m$, заданої відповідно до означення 2.1 обмеженим C_b^2-ізоморфізмом $g\colon D \times V \to U \subset \mathbb{R}^m$, де $D \subset \mathbb{R}^{m-k}$, $V \subset \mathbb{R}^k$, $g\big(D \times \{\vec{0}\}\big) = S$.

В якості строго трансверсального до S набору векторних полів, що попарно комутують, можна взяти набір $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ полів на U, g-зв'язаних з постійними векторними полями $Y_i = \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix}$ — одиниця на $(m-k+i)$-ій позиції, $i = 1, \dots, k$. Поверхнева міра $\sigma_{\vec{X}}$ першого типу на S визначається рівністю:

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = \lim_{r\to 0} \frac{\lambda_m\big(\Phi^{\vec{X}}_{B_r}(A)\big)}{\lambda_k(B_r)} = \int\limits_{g_D^{-1}(A)} \left|\det g'(\vec{x},\vec{0})\right| d\vec{x}, \qquad A \in \mathcal{B}(S),$$

де через g_D позначено функцію $z = (z_1,\ldots,z_{m-k}) \mapsto g(z_1,\ldots,z_{m-k},\vec{0}) \in S$, визначену на D.

Асоційованою формою поверхні S є диференціальна k-форма $\nu = (g^{-1})^*(dt_{m-k+1} \wedge \ldots \wedge dt_m)$ на U. Поверхнева міра другого типу на S, індукована мірою λ_m та нормованою асоційованою формою $\omega(\vec{x}) = \dfrac{\nu(\vec{x})}{\|\nu(\vec{x})\|}$, збігається з класичною площею:

$$\sigma_\omega(A) = \iint\limits_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det[g_D{}'(\vec{x})^T g_D{}'(\vec{x})]}\, d\vec{x}, \qquad A \in \mathcal{B}(S). \tag{3}$$

У випадку, коли поверхня S є графіком функції $f\colon D \to \mathbb{R}$ класу C_b^2, $D \subset \mathbb{R}^{m-1}$, функцію $g\colon D \times (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^m$ можна задати рівністю $g(z_1,\ldots,z_{m-1},t) = (z_1,\ldots,z_{m-1},t + f(\vec{z}_{m-1}))$, і тоді формула (3) перетвориться у загальновідому формулу площі поверхні:

$$\sigma_\omega(A) = \iint\limits_{\pi_{m-1}(A)} \sqrt{1 + \left\|\mathbf{grad} f(\vec{x})\right\|^2}\, d\vec{x}, \qquad A \in \mathcal{B}(S),$$

де π_{m-1} — оператор проектування на перші $m-1$ координат.

Розглянуто також приклад ріманового многовиду з рівномірною структурою (з модельним простором $\mathbb{R}^m$). Нехай задано ріманів многовид M і вкладена в його компактну підмножину $\overline{U}$ замкнена поверхня S, тобто $S = g\big(N \times \{\vec{0}\}\big)$, де $g\colon N \times D \to U \subset M$ — C_b^2-ізоморфізм, N — многовид з обмеженою структурою, моделлю якого є $\mathbb{R}^{m-k}$, D — відкритий окіл нуля в $\mathbb{R}^k$. Тоді S також являє собою ріманів многовид з рімановим тензором, що індукується вкладенням. На $\overline{U}$ ріманів тензор T задає міру об’єму V, а індукований тензор $\widetilde{T}$ визначає міру об'єму $\widetilde{V}$ на S.

Диференціальна k-форма $\nu = (g^{-1})^* P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ на U, де $P\colon N \times D \to$ $\to D$ — проекція на другу координату, є асоційованою формою поверхні S. Для асоційованої k-форми ω, отриманої нормуванням ν (за рімановою нормою), асоційована з мірою об'єму V поверхнева міра другого типу співпадає з мірою об'єму $\widetilde{V}$ на S, що обґрунтовує адекватність конструкції.

Четвертий розділ присвячено дослідженню слабкої диференційовності мір уздовж векторних полів. Отримано ряд критеріїв для слабкої диференційовності. Основним результатом розділу є узагальнення критерію слабкої диференційовності В.І. Богачова, який описує диференційовність міри μ через ліпшицевість функцій $t \mapsto \mu_t(A)$, $A \in \mathcal{B}(M)$.

Для борелівської міри μ на банаховому многовиді M з рівномірною структурою і обмеженого векторного поля X з потоком Φ_t розглядається зсув $\mu_t = \mu \circ \Phi_t$ міри μ вздовж X. Відомими є означення неперервності та диференційовності міри уздовж векторного поля, що узагальнюють відповідні властивості за напрямком.

Означення 4.1. *Борелівська μ називається неперервною вздовж векторного поля X, якщо*

$$\lim_{t\to 0} \|\mu_t - \mu\| = 0.$$

Означення 4.2. *Міра μ називається диференційовною за Фоміним (в сильному сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{B}(M)$ функція $t \mapsto \mu_t(A)$ є диференційовною на $\mathbb{R}$.*

Означення 4.3. *Міра μ називається диференційовною за Скороходом (в слабкому сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної функції $f \in$ $\in C_b(M)$ функція*

$$F_f(t) = \int\limits_M f\big(\Phi_{-t}(x)\big)\,\mu(dx) = \int\limits_M f\,d\mu_t$$

є диференційовною на $\mathbb{R}$.

Наступні два критерії демонструють зв'язок між сильною та слабкою диференційовністю.

Теорема 4.1. *Міра* μ *диференційовна за Фоміним вздовж векторного поля* X *тоді і тільки тоді, коли існує така міра* ν *на* $\mathcal{B}(M)$, *що*

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int_0^t \nu_s(A)\, ds, \qquad \forall A \in \mathcal{B}(M),\ t \in \mathbb{R}.$$

і при цьому виконується одна з двох умов: ν *неперервна вздовж* X *або* ν *абсолютно неперервна відносно* μ. *При цьому* $d_X\mu = \nu$.

Теорема 4.2. *Наступні умови є еквівалентними:*

1) Міра μ *диференційовна за Скороходом уздовж векторного поля* X.

2) Існує така міра ν *на* $\mathcal{B}(M)$, *що для всіх множин* $A \in \mathcal{B}(M)$ *і всіх* $t \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int_0^t \nu_s(A)\, ds.$$

3) Існує така міра ν *на* $\mathcal{B}(M)$, *що для всіх функцій* $f \in C_b(M)$ *виконується рівність*

$$\int_M f(x)\,(\mu_t - \mu)(dx) = \int_0^t \int_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

4) Існує міра така ν *на* $\mathcal{B}(M)$, *що рівність* (4) *виконується для будь-якої обмеженої борелівської функції* f *на* M.

При цьому міра ν, *визначена в умовах 2-4, збігається з похідною Скорохода міри* μ.

Таким чином сильна диференційовність міри μ еквівалентна її слабкій диференційовності при абсолютно неперервній відносно μ похідній Скорохода

$d_X\mu$ (або неперервній вздовж X).

Для випадку, коли міра є радонівською, має місце також послаблений варіант останнього критерію.

Наслідок 4.1. *Нехай міра є μ радонівською, $\mathcal{F} \subset C_b(M)$ — деякий клас функцій, що розділяє точки M (тобто для будь-яких різних точок $x, y \in M$ існує така функція $f \in \mathcal{F}$, що $f(x) \neq f(y)$). Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) Міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X і має радонівську похідну Скорохода.

2) Існує радонівська міра ν, для якої рівність (4) *виконується для всіх функцій $f \in \mathcal{F}$.*

3) Існує така радонівська міра ν на M, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}$ функція $F_f(t) = \int_M f\, d\mu_t$ є диференційовною на $\mathbb{R}$ і при цьому $F'_f(t) = \int_M f\, d\nu_t$.

Міра ν з 2 і 3 є похідною Скорохода від μ.

Справедливим є також критерій диференційовності через формулу інтегрування частинами.

Наслідок 4.2. *Нехай простір $C_b^1(M)$ розділяє точки многовиду M, а μ та ν — радонівські міри на M. Тоді μ є слабко диференційовною уздовж обмеженого векторного поля X і $d_X\mu = \nu$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $f \in C_b^1(M)$ має місце рівність*

$$\int\limits_M f\, d\nu = -\int\limits_M \partial_X f\, d\mu.$$

Наступний результат є узагальненням критерію слабкої диференційовності, отриманого В.І. Богачовим для випадку диференційовності за напрямком на лінійно опуклих просторах. Відповідно до вказаного критерію слабка диференційовність міри μ є еквівалентною ліпшицевості всіх функцій $t \mapsto \mu_t(A)$, де $A \in \mathcal{B}(M)$. Наведено варіанти критерій для банахового простору на банахового многовиду з рівномірною структурою.

Теорема 4.3. *Нехай M — банахів простір, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$, X — векторне поле класу C^1 на M. І нехай існує число $L > 1$ таке, що для кожної точки $x \in M$ виконуються нерівності $\|X(x)\| \leqslant L$, $\|X'(x)\| \leqslant L$. Тоді міра μ є диференційовною за Скороходом вздовж X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожної множини $A \in \mathcal{A}$ існує таке $c(A)$, що:*

$$\left|\mu_t(A) - \mu(A)\right| \leqslant c(A)\,|t|, \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma].$$

Теорема 4.4. *Нехай банахів многовид M з рівномірним атласом $\Omega = \left\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\right\}$ допускає розбиття одиниці класу C^1, X — векторне поле класу $C_b^1(M)$, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$. Тоді міра μ диференційовна за Скороходом вздовж X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує $c(A)$ таке, що:*

$$\left|\mu_t(A) - \mu(A)\right| \leqslant c(A)\,|t|, \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma].$$

Як наслідок маємо, що на банаховому многовиді з рівномірним атласом, що допускає розбиття одиниці класу C^1, слабка похідна радонівської міри є також радонівською.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Даний розділ присвячено огляду літератури, що стосується поверхневого інтегрування та диференціювання мір.

У підрозділ 1.1 коротко наводяться необхідні теоретичні відомості з теорії міри та диференціальної геометрії.

Підрозділ 1.2 присвячено огляду результатів, що стосуються банахових многовидів з рівномірною структурою.

В підрозділі 1.3 приведено огляд відомих результатів з теорії диференційовних мір. Розглядається декілька різних підходів до визначення поняття диференційовності мір.

В підрозділі 1.4 розглядаються різні підходи до побудови поверхневих мір в банахових просторах та на многовидах.

1.1 Попередні відомості та позначення

Нехай M є деяким метричним простором. Позначатимемо через $C_b(M)$ та $C_b^{\mathbb{C}}(M)$ банахові простори відповідно дійснозначних та комплекснозначних неперервних обмежених функцій на M з нормою $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{x\in M}\big|f(x)\big|$.

Через $B_\varepsilon^N(x)$ та $\overline{B}_\varepsilon^N(x)$ будемо позначати відповідно відкриту та замкнену кулю в метричному просторі N з центром у точці x та радіусом ε. Для множин об'єднання $\bigcup\limits_{x\in A} B_\varepsilon^N(x)$ будемо позначати через $B_\varepsilon^N(A)$ або $B_\varepsilon(A)$ чи A_ε, якщо зрозуміло, в якому просторі розглядаються відповідні кулі.

1.1.1 Міри на метричних просторах Нехай M — метричний простір, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин M (здебільшого будемо розглядати випадок борелівської σ-алгебри $\mathcal{B}(M)$, що породжена всіма відкритими підмножинами). Далі під мірами на M будемо розуміти дійснозначні знакозмінні скінченні

σ-адитивні функції множин на $\mathcal{A}$. Для міри μ на M існує розклад Хана-Жордана у різницю взаємно сингулярних невід'ємних мір: $\mu = \mu^+ - \mu^-$, де $\mu^+ = \mu(\cdot \cap M^+)$, $\mu^- = -\mu(\cdot \cap M^-)$, $M = M^+ \cup M^-$ і $M^+ \cap M^- = \varnothing$. Простір мір на $\mathcal{A}$ є банаховим з нормою $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(M)$ (тут $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ — повна варіація міри μ).

Борелівська міра μ називається радонівською, якщо для кожної множини $B \in \mathcal{A}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує така компактна множина $K_\varepsilon \subset B$, що $|\mu|(B \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$. У випадку повного сепарабельного метричного простору всі борелівські міри є радонівськими.

Через $\mathcal{L}^p(\mu)$ будемо позначати клас функцій, $|\mu|$-інтегровних за Лебегом в степені p (при цьому функції, що співпадають майже всюди, ототожнюються). Простір $\mathcal{L}^p(\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$ наділений нормою

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(|\mu|)} = \left(\int\limits_M |f|^p \, d|\mu| \right)^{1/p}.$$

Для кожної функції $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ символом $\nu = f \cdot \mu$ позначимо міру, що задається рівністю:

$$\nu(A) = \int\limits_A f \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Тоді виконуються такі властивості:

$$|f \cdot \mu| = |f| \cdot |\mu|; \quad \|f \cdot \mu\| = \|f\|_{\mathcal{L}^1(|\mu|)}; \quad \forall A \in \mathcal{A} : \left| \int\limits_A f \, d\mu \right| \leqslant \int\limits_A |f| \, d|\mu|.$$

Для будь-якої міри μ визначимо лінійний функціонал L_μ на $C_b(M)$:

$$L_\mu f = \int\limits_M f \, d\mu, \quad f \in C_b(M). \tag{1.1}$$

Тоді функціонал L_μ є обмеженим і при цьому $\|L_\mu\| = \|\mu\|$ ([23, с. 284]).

1.1.2 Банахові многовиди Нижче наводяться необхідні теоретичні відомості з диференціальної геометрії (див. [31]).

Нехай M — деяка множина. Атласом Ω класу C^p ($p \geqslant 0$) на M називається сукупність пар $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ (де α пробігає деяку множину індексів), що задовольняє такі умови:

1. Кожна U_α є підмножиною M, а $\{U_\alpha\}$ — покриття M.

2. Кожне φ_α є бієктивним відображенням множини U_α на відкриту підмножину $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ деякого банахового простору E_α, і при цьому для будь-якої пари індексів α та β множина $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ є відкритою в E_α.

3. Відображення $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ являє собою C^p-дифеоморфізм для кожної пари індексів α та β.

При цьому кожна окрема пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ називається картою атласу. Якщо точка $x \in M$ лежить в U_α, то будемо казати, що $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта в x.

Завдяки гомеоморфності всіх відображень склейки $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ на кожній множині U_α можна коректно задати топологію, запозичивши її з $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, і таким чином задати топологію на M.

Якщо простір M є зв'язним, то можна вважати, що всі простори E_α співпадають з одним і тим же простором E (оскільки всі простори E_α є лінійно гомеоморфними), і атлас називається E-атласом.

Нехай на M задана підмножина U та гомеоморфізм $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ на відкриту підмножину деякого банахового простору E. Пара (U, φ) є сумісною з атласом $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$, якщо кожне відображення $\varphi_\alpha\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U_\alpha) \to$ $\to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ є C^p-дифеоморфізмом. Два атласи називаються сумісними, якщо кожна карта одного сумісна з іншим. Зрозуміло, що сумісність атласів є відношенням еквівалентності. Сукупність еквівалентних атласів класу C^p на M задає структуру C^p-многовиду (або многовиду класу C^p). Якщо всі простори E_α в деякому атласі лінійно гомеоморфні, тоді завжди можна знайти еквівалентний атлас, для якого всі вони співпадають з деяким банаховим простором E. У такому випадку M називається E-многовидом або многовидом з модельним простором E.

Якщо X та Y — два многовиди, то можна задати структуру многовиду на $X \times Y$: якщо $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ та $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — атласи відповідно для X та Y, то множина пар $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ утворює атлас для добутку. При цьому добутки еквівалентних атласів утворюють еквівалентні атласи, тому структура визначена коректно.

Нехай X та Y — два банахових многовиди. Відображення $f \colon X \to Y$ називається C^p-морфізмом, якщо для будь-якого $x \in X$ існують такі карти (U, φ) в x та (V, ψ) в $f(x)$, що $f(U) \subset V$ та відображення $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V)$ є відображенням класу C^p. Очевидно, що дана умова виконується для будь-якого вибору карт (U, φ) в x та (V, ψ) в $f(x)$ такого, що $f(U) \subset V$.

1.1.3 Розбиття одиниці Нехай Y — топологічний простір. Нагадаємо, що покриття простору Y називається локально скінченним, якщо у кожної точки є окіл, який перетинається лише зі скінченною кількістю елементів покриття. Подрібнення покриття простору Y — це інше покриття, кожний елемент якого міститься в елементі першого покриття. Топологічний простір називається паракомпактним, якщо він хаусдорфів і для кожного його відкритого покриття існує локально скінченне відкрите подрібнення.

Відомо, що метричний простір є паракомпактним [16, с. 99]. При цьому для будь-якого відкритого покриття $\{V_\alpha\}$ існує локально скінченне відкрите покриття $\{T_\alpha\}$ з тим же набором індексів, таке, що для кожного індексу α справедливим є включення $T_\alpha \subset U_\alpha$ ([31, с. 43]).

Носієм supp$f$ функції (морфізму) $f \colon M \to \mathbb{R}$ називається замикання множини точок $x \in X$, для яких $f(x) = 0$.

Розбиттям одиниці класу C^p на многовиді M називається пара з відкритого покриття $\{V_i \mid i \in I\}$ многовиду M та системи функцій $\{f_i \mid i \in I\}$ на X таких, що задовольняють умови:

1. Для кожного $x \in X$ та кожного $i \in I$ виконується нерівність: $f_i(x) \geqslant 0$.

2. Для кожного індексу $i \in I$ носій f_i міститься в V_i.

3. Покриття $\{V_i \mid i \in I\}$ є локально скінченним.

4. Для кожної точки $x \in X$ виконується рівність $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) = 1$, причому завдяки умові 3 для кожної точки x ця сума є скінченною.

Кажуть, що паракомпактний многовид M допускає розбиття одиниці, якщо для кожного локально скінченного покриття $\{V_i\}$ існує розбиття одиниці $\{f_i\}$ таке, що для всіх індексів i: supp$f_i \subset V_i$.

1.2 Банахові многовиди з рівномірною структурою

Класс банахових многовидів з рівномірною структурою вперше вводиться Ю. Л. Далецьким та Я. І. Білопольською у роботі [20, с. 177]. Аналогічна умова виникає і у роботі С. Ленга [31, с. 96] в якості достатньої умови існування глобального потоку обмеженого векторного поля. Ю. В. Богданським у роботі [9] отримано варіант формули Гаусса-Остроградського на многовидах, що мають вказану структуру.

Наступні означення наводяться відповідно до роботи [9].

Нехай M є зв'язним хаусдорфовим банаховим многовидом класу C^2 з дійсним модельним простором E.

Означення 1.1. *Атлас $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ на M називається обмеженим, якщо існує число $K > 0$ таке, що відображення склейки $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для кожної пари карт атласа задовольняє умову:*

$$x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \big\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})'(x)\big\| \leqslant K, \\ \big\|(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})''(x)\big\| \leqslant K. \end{cases}$$

Обмежені атласи Ω_1 та Ω_2 на M називаються еквівалентними, якщо атлас $\Omega_1 \cup \Omega_2$ також є обмеженим атласом на M. Якщо на M задано клас еквівалентних обмежених атласів, то кажуть, що на M задана обмежена структура (класу C^2).

Нехай M_1 та M_2 — два банахових многовиди класу C^p з модельними просторами E_1, E_2 і обмеженими атласами Ω_1, Ω_2 відповідно.

Означення 1.2. *Морфізм $f\colon M_1 \to M_2$ називається обмеженим, якщо для нього існує таке число $C > 0$, що для кожної пари карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ та $(V, \psi) \in \Omega_2$ виконується умова:*

$$\begin{cases} p \in U, \\ f(p) \in V. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left\| (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'\big(\varphi(p)\big) \right\| \leqslant C, \\ \left\| (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})''\big(\varphi(p)\big) \right\| \leqslant C. \end{cases}$$

Зрозуміло, що властивість відображення f бути обмеженим морфізмом не залежить від вибору обмеженого атласу (в класі еквівалентних), і тому можна казати про категорію банахових многовидів класу C^2 з обмеженою структурою.

Визначення на M обмеженого атласу дозволяє ввести на M метрику. Для кусково-гладкої кривої $[t_1, t_2] \ni t \mapsto x(t) \in M$ розглядаємо всеможливі розбиття Δ: $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = t_2$ відрізку параметру, при яких кожна крива $\Gamma_k = \big\{x(t) \mid \tau_{k-1} \leqslant t \leqslant \tau_k\big\}$ лежить в області визначення U_k однієї з карт (U_k, φ_k) вихідного атласу. Кожному такому розбиттю Δ співставляється число $l(\Gamma; \Delta) = \sum\limits_{k=1}^{m} l(\Gamma_k)_{\varphi_k}$ $\Big($тут $l(\Gamma_k)_\varphi = \displaystyle\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \big\|(x_\varphi)'(\tau)\big\|\, d\tau$ — довжина представлення кривої Γ_k в карті φ, де $x_\varphi(\tau) = \varphi\big(x(\tau)\big)\Big)$. Обмеженість атласу призводить до коректного означення довжини кривої Γ: $L(\Gamma) = \sup\limits_{\Delta}\big\{l(\Gamma; \Delta)\big\}$. Відстань між точками вводиться як точна нижню грань довжин всеможливих кусково-гладких кривих, які з'єднують ці точки.

Отримана метрика узгоджується з вихідною топологією. При переході до еквівалентного обмеженого атласу метрика замінюється еквівалентною $\big($існують такі $C_1, C_2 > 0$, що для будь-яких $x, y \in M$ виконується нерівність $C_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant C_2\rho_1(x, y)\big)$. Обмежений морфізм $f\colon (M_1, \Omega_1) \to$ $\to (M_2, \Omega_2)$ при фіксованих обмежених атласах Ω_1 і Ω_2 є ліпшицевим відображенням відносно метрик, породжених цими атласами.

Фіксація обмеженого атласу дозволяє ввести в дотичному просторі T_pM до многовиду M норму, еквівалентну нормі модельного простору. Для $\xi \in T_pM$ покладемо: $|||\xi|||_p = \sup_\alpha \|\xi_{\varphi_\alpha}\|$, де $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — повний набір карт, для яких $p \in U_\alpha$, а $\xi_\varphi \in E$ — представлення дотичного вектору ξ в карті φ. При цьому має місце властивість рівномірного топологічного ізоморфізму просторів T_pM і модельного простору E: $\|\xi_\varphi\| \leqslant |||\xi|||_p \leqslant K\|\xi_\varphi\|$, де K — постійна з означення обмеженого атласу, а φ — карта в точці $p \in M$.

На многовиді з обмеженим атласом (M, Ω) коректним є задання обмеженого тензорного поля T класу C^1. Передбачається існування числа $C > 0$, що обмежує зверху норму головної частини T_α кожного локального представлення тензора T разом з нормою її похідної:

$$\Big((U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega;\ x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)\Big) \Longrightarrow \Big(\big\|T_\alpha(x)\big\| \leqslant C;\ \big\|T'_\alpha(x)\big\| \leqslant C\Big).$$

Властивість обмеженості тензорного поля є інваріантною відносно переходу до еквівалентного обмеженого атласу. Такі тензорні поля називаються тензорними полями класу $C_b^1(M)$. Природним чином визначаються гладкі функції класу $C_b^p(M)$ ($p = 0, 1, 2$); $C_b(M) = C_b^0(M)$. Крім того, подібні позначення будуть також використовуватися і для відкритих підмножин $U \subset M$, а також без явного зазначення області визначення полів. Вказаний клас полів також інваріантний відносно переходу до еквівалентного атласу.

Означення 1.3. *Обмежений атлас Ω називається рівномірним, якщо існує таке $r > 0$, що для будь-якої точки $p \in M$ існує така карта $(U, \varphi) \in \Omega$, що $\varphi(U)$ містить кулю в E з центром в $\varphi(p)$ радіуса r.*

Метрика на M, породжена рівномірним атласом, перетворює M в повний метричний простір. Якщо обмежений атлас еквівалентний рівномірному, то метрика, породжена цим атласом, є також повною. Якщо многовид M має обмежену структуру і серед еквівалентних атласів, що задають цю структуру, є хоча б один рівномірний, структура називається рівномірною. Структури обмежених ізоморфних многовидів є одночасно рівномірними або ні.

У випадку рівномірного атласу потік $\Phi(t,x)$ векторного поля X класу $C_b^1(M)$ визначено глобально на $\mathbb{R}\times M$ [31, с. 96]. Таким чином, дана властивість має місце на многовиді з рівномірною структурою. В загальному випадку потік $\Phi(t,x)$ є морфізмом класу C_b^1 на своїй області визначення [31, с. 97].

У роботі [20] для випадку многовиду з рівномірною структурою отримано умову існування та єдиності розв'язку стохастичного диференціального рівняння, що задається локальним полем Іто, та ряд властивостей. Як зазначається авторами, додаткова умова існування рівномірного атласу на многовиді, вбачається цілком природною. На многовиді з рімановою структурою, рівномірний атлас можна задати, наприклад, картами вигляду

$$U_x = \exp_x S_r,$$

де S_r — куля радіусу r в T_xX, $\exp$ — експоненційне відображення, що відповідає зв'язності, породженій рімановою метрикою. Коректність такого означення передбачає існування нижньої грані радіусів околів, на яких визначено відображення $\exp$. Остання властивість завідомо має місце на компактному многовиді або на групі з однорідною метрикою.

Умови рівномірного атласу та обмеженого векторного поля розглядаються і у роботі Ю. Є. Глікліха [49] для випадку ріманових многовидів. Вводиться модифікація наведеного вище означення рівномірного атласу, в якій куля радіусу r розглядається не у карті, а на многовиді відповідно до ріманової метрики. Для ріманових многовидів, що мають вказану властивість, показано існування глобального розв'язку стохастичного диференціального рівняння у формі Іто.

1.3 Диференційовність мір

Розвиток математичної фізики і варіаційного числення привернув увагу математиків до пошуків розв'язків диференціальних рівнянь для функцій нескінченного числа змінних. Враховуючи той факт, що в диференціальних рівняннях в частинних похідних значний прогрес був досягнутий за допомогою теорії узагальнених функцій, С. В. Фомін вважав за доцільне розвинути теорію узагальнених функцій нескінченного аргументу для аналогічних просувань в області диференціальних рівнянь в нескінченновимірних лінійних просторах. Однак спроба побудови вказаної теорії одразу ж ускладнюється наступною обставиною. У скінченновимірному просторі існує простий зв'язок між функціями точки і функціями множини за рахунок представлення функцій множин їх щільностями відносно міри Лебега (можливо, узагальненими). У нескінновимірному просторі, подібної "гарної" міри немає, тому виникає необхідність паралельно розглядати два види об'єктів — функції точки (функціонали) та функції множин (розподіли), та вводити основні операції аналізу для об'єктів обох типів. Відправною точкою для досліджень за вказаним напрямком стало введення С. В. Фоміним поняття диференційовних мір у 1966 році (роботи [43, 44]). Значний внесок у розвиток теорії на початковому етапі також зроблено у роботах [1, 2, 21], огляд основних результатів міститься в роботах [4, 40].

Нехай X — локально опуклий лінійний топологічний простір, X' — спряжений простір, μ — міра на деякій σ-алгебрі $\mathcal{A}$ підмножин X (здебільшого розглядається випадок, коли $\mathcal{A}$ породжена всіма борелівськими циліндричними множинами в X). Нехай задано такий вектор $h \in X$, що з умови $A \in \mathcal{A}$ випливає $A + th \in \mathcal{A}$ для всіх дійсних t.

Означення 1.4. *Міра μ називається диференційовною за напрямком h (за Фоміним), якщо границя*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu(A + th) - \mu(A)}{t}$$

визначена для кожної множини $A \in \mathcal{A}$. Сама границя називається диференціалом міри (на множині A) при прирості h і позначається через $d_h\mu$ або

$d\mu\, h$.

Виявляється, що диференціал $d_h\mu$ також є мірою, причому завжди є знакозмінною, тому доцільно з самого початку допускати до розгляду знакозмінні міри. Міра $d_h\mu$ є абсолютно неперервною відносно міри μ, а відповідну похідну Радона-Нікодима $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ називають логарифмічною похідною μ уздовж h.

Похідні вищих порядків $d_h^m\mu$, а також змішані похідні $d_{h_1}\dots d_{h_m}\mu$ визначаються індуктивно.

У випадку скінченновимірного простору $\mathbb{R}^m$ будь-яка міра ν, що представляється нескінченно диференційовною щільністю відносно міри Лебега λ_m, є нескінченно диференційовною за усіма напрямками. Має місце також зворотній факт ([5, с. 110]).

Твердження 1.1. *Міра μ на $\mathbb{R}^n$ є диференційовною уздовж n лінійно незалежних векторів в тому і тільки тому випадку, коли її узагальнені частинні похідні представляються інтегровними функціями, інакше кажучи, $\mu = \alpha\lambda_m$, де $\alpha \in W^{1,1}(\mathbb{R}^m)$ (тут $W^{p,k}$ — клас Соболева, що містить всі такі функції $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, що всі узагальнені частинні похідні порядку, меншого за k, входять до $\mathcal{L}^p(\mu)$).*

Таким чином, у випадку скінченновимірного простору поняття диференційовних мір не виявляться надто змістовним, оскільки аналіз гладких мір зводиться до класичного аналізу узагальнених функцій.

Для нескінченновимірного випадку С. В. Фомін запропонував замість пари просторів (пробні функції — узагальнені функції) розглядати чотири простори: деякий простір функцій S, його спряжений S', деякий простір мір M, його спряжений M'.

Інше означення диференційовності мір було запроваджене А.В. Скороходом у роботі [39]. Первинне означення вводилося для випадку міри на сепарабельному гільбертовому просторі, однак наведемо більш загальний варіант локально опуклого простору (див. [5]).

Означення 1.5. *Берівська міра μ на локально опуклому просторі X нази-*

вається диференційовною (за Скороходом) за напрямком h, якщо для кожної функції $f \in C_b(X)$ функція

$$t \mapsto \int\limits_X f(x - th)\,\mu(dx)$$

є диференційовною. Диференційовність борелівської міри розуміється як диференційовність її звуження на берівську σ-алгебру.

Для випадку диференційовності за Скороходом також існує відповідна похідна ν (берівська), така, що всіх функцій $f \in C_b(X)$ виконується рівність

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_X \frac{f(x-th) - f(x))}{t}\,\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\,\nu(dx).$$

Зрозуміло, що з диференційовності за Фоміним випливає диференційовність за Скороходом, і відповідні похідні співпадають. Як показано у роботі [5], насправді має місце такий критерій:

Теорема 1.1. *Радонівська міра μ на локально опуклому просторі X, диференційовна за Скороходом уздовж напрямку h, є диференційовною за Фоміним уздовж цього напрямку, в тому і тільки тому разі, коли її слабка похідна ν абсолютно неперервна відносно μ.*

Як показано у роботі [40], у випадку нескінченно диференційовних мір, обидва означення співпадають.

С. В. Фомін у роботі [45] поставив питання опису диференційовних мір в термінах перетворення Фур'є (за визначенням, перетворенням Фур'є від міри μ є відображення $l \mapsto \widetilde{\mu}(l) = \int_X \exp^{il(x)}\,\mu(dx)$, $l \in X^*$). Відповідь на це питання дає наступне твердження, отримане в роботі [7].

Твердження 1.2. *Міра μ (на σ-алгебрі $\mathcal{A}$, породженій циліндричними множинами) є диференційовною за Скороходом уздовж напрямку h тоді і тільки* *тоді, коли існує така міра* ν *на* $\mathcal{A}$, *що*

$$\widetilde{\nu}(l) = -il(h)\widetilde{\mu}(l), \qquad \forall l \in X^*.$$

У роботі [6] отримано критерій диференційовності за Скороходом через властивості функції $t \mapsto \mu(A + th)$, а саме її ліпшицевість.

Теорема 1.2. *Радонівська міра* μ *на локально опуклому просторі* X *є диференційовною за Скороходом уздовж напрямку* h *тоді і тільки тоді, коли для кожного* $A \in \mathcal{B}(X)$ *існує таке число* $c(A)$, *що для всіх* $t \in [-1, 1]$ *має місце нерівність*

$$\big|\mu(A + th) - \mu(A)\big| \leqslant c(A)|t|.$$

Тоді числа $c(A)$ *можна обрати рівномірно обмеженими.*

У роботі [4] було поставлене питання вивчення такої властивості міри μ за напрямком h, як абсолютна неперервність всіх функцій $t \mapsto \mu(A + th)$. Зокрема, викликає цікавість питання, чи можливо замінити в формулюванні теореми 1.2 умову ліпшицевості абсолютною неперервністю. Дослідження властивості абсолютною неперервності функцій $t \mapsto \mu(A + th)$ проведене в роботі [46]. При цьому отримано негативну відповідь на поставлене питання. Однак, виявилося, що відповідь стає позитивною, якщо в означенні абсолютної неперервності допустити точки, що лежать за межами фіксованого відрізку.

Теорема 1.3. *Існує така ймовірнісна борелівська міра* μ *на прямій, що для всякої борелівської множини* A *числова функція* $\varphi_A(t) = \mu(A + t)$ *є абсолютно неперервною на відрізку* $[0, 1]$, *проте міра* μ *не є диференційовною за Скороходом.*

Теорема 1.4. *Радонівська міра* μ *на локально опуклому просторі* X *є диференційовною за Скороходом уздовж напрямку* h *тоді і тільки тоді, коли для кожного* $A \in \mathcal{B}(X)$ *функція* μ_{th} *(тут* $\mu_{th}(A) = \mu(A + th)$*) є абсолютно неперервною на прямій* $\mathbb{R}$ *у наступному сенсі: для всякого* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta > 0$, *що для кожного скінченного набору диз'юнктних відрізків* $[t_1, s_1] \ldots [t_k, s_k]$ *з сумою довжин меншою за* δ *виконується нерівність* $\sum_{i=1}^{k} \bigl|\mu_{t_i}(A) - \mu_{s_i}(A)\bigr| < \varepsilon$.

Цікавість також викликає питання відновлення диференційовної міри за її логарифмічною похідною. Дослідження цього питання проводилося у роботах А. І. Кириллова ([29] та інші) з використанням методу функцій Ляпунова, отримано ряд достатніх умов існування міри з заданою логарифмічною похідною.

Диференційовність за напрямком має природні узагальнення. Ю. Л. Далецьким у роботі [22] була введена диференційовність уздовж векторного поля. Подальші дослідження проведені, зокрема, у [20] як для мір на банахових просторах, так і для мір на гладких банахових многовидах.

Розглянемо в сепарабельному банаховому просторі B гладке векторне поле $Z\colon B \to B$, для якого $\sup\limits_{x\in B} \|Z'(x)\| < \infty$. Нехай Φ_t — інтегральний потік поля Z (глобальний). Тоді для борелівської міри μ при кожному $t \in \mathbb{R}$ має зміст

$$\mu_t = \mu \circ \Phi_{-t},$$

що являє собою борелівську міру.

Означення 1.6. *Міра* μ *називається диференційовною уздовж векторного поля* Z*, якщо існує міра* $D_Z\mu = -\dfrac{d}{dt}\mu_t \Big|_{t=0}$ *— похідна* μ *уздовж* Z*, що розуміється у тому сенсі, що для кожної функції* $\varphi \in C_b^1(B)$ *(тобто* $\varphi\colon B \to \mathbb{R}$*,* φ *має неперервну і обмежену на* B *похідну Фреше) виконується рівність*

$$\int\limits_B \varphi(x)\,(D_Z\mu)(dx) = -\int\limits_B (D_Z\varphi)(x)\,\mu(dx). \tag{1.2}$$

Формулу (1.2) називають формулою інтегрування частинами. У випадку, якщо міра μ має логарифмічну похідну ρ_μ^Z уздовж Z (щільність $D_Z\mu$ відносно

μ, якщо існує), формула (1.2) може бути записана у вигляді

$$\int\limits_B (D_Z\varphi)(x)\,\mu(dx) = -\int\limits_B \varphi(x)\rho_\mu^Z\,\mu(dx).$$

Як буде показано в розділі 4 (наслідок 4.2 разом з зауваженням, що слідує за ним) означення 1.6 є еквівалентним введеному вище означенню диференційовності за Скороходом (з природним узагальненням на випадок зсувів μ_t уздовж векторного поля замість зсувів μ_{th} за напрямком h). У подальших міркуваннях у роботі [20] накладається умова існування логарифмічної похідної, і досліджуються її властивості, тобто фактично розглядається випадок диференційовності за Фоміним уздовж векторного поля (див. теорему 1.1). Зокрема, отримано оцінки для інтегралів

$$\int\limits_B \left|\rho_\mu^Z(x)\right|^{2m}\mu(dx),$$

пов'язані з оцінками похідних вищих порядків.

Аналогічно випадку банахового простору, через формулу інтегрування частинами поняття диференційовності мір запроваджується і для банахових многовидів. Однак для дослідження логарифмічних похідних залучена додаткова структура Гільберта-Шмідта на многовиді.

На нескінченновимірних многовидах виникає природний новий об'єкт — диференціальні рівняння у мірах, що потребує вивчення паралельно до вивчення диференціальних рівнянь для функцій. Прикладом параболічного рівняння в мірах у нескінченновимірному випадку є пряме рівняння Колмогорова, яке, на відміну від скінченновимірного випадку, не може бути зведеним до рівнянь відносно функцій.

Можна також розглядати ще більш загальне означення диференційовності мір, якщо замість зсувів мір (за напрямком або уздовж інтегральних кривих векторного поля) брати довільні вимірні перетворення. Вказаний випадок розглядається, зокрема, у роботах О. Г. Смолянова та H. Weizsaecker [54, 55]. Однак, знову таки, більша частина результатів стосується випадку, коли визначено логарифмічну похідну.

Загалом з теорії диференційовних мір та її застосувань опубліковано сотні робіт. Детальний опис відомих результатів, а також широкий список посилань, наведено у монографії [5].

1.4 Поверхневі міри та поверхневе інтегрування

Проблеми інтегрування на нескіченновимірних просторах почали викликати цікавість лише у 70-их роках нашого століття.

Для скінченновимірного випадку справедливою є наступна формула Остроградського-Гаусса. Нехай множина $V \in \mathbb{R}^n$ є областю, обмеженою кусочно-гладкою поверхнею $S = \partial V$. Тоді для неперервно диференційовного векторного поля F, визначеного в околі S має місце формула

$$\int\limits_V \mathrm{div} F(x)\, d\lambda = \int\limits_S (F \cdot \vec{n})\, d\sigma,$$

де зліва інтеграл береться за мірою Лебега (об'єм), справа — класичний поверхневий інтеграл, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні S.

Одним з ключових напрямків розвитку теорії поверхневого інтегрування є пошук нескінченновимірних аналогів формули Гаусса-Остроградського.

Вперше інтеграли по нескінченновимірним поверхням в гільбертовому просторі з'явилися в роботах H.-H Kuo [51], V. A. Godman [50] та А. В. Скорохода [39]. У вказаних роботах зроблено лише початкові кроки у вирішенні даної задачі: у роботах [50,51] розглядається доволі специфічний гауссівський випадок, для якого побудовано звуження на гіперповерхню та сформульовано теорему Гаусса-Остроградського. У роботі [39] поставлена задача побудови міри μ^S на поверхні S корозмірності 1 (вкладеній у гільбертів простір X), що асоційована з заданою мірою μ на $\mathcal{B}(X)$ таким чином, щоб для неперервних функцій в околі поверхні S виконувалася рівність

$$\int\limits_S f\, d\mu^S = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{S_\varepsilon} f\, d\mu$$

або

$$\int\limits_S f\, d\mu^S = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\mu(S_\varepsilon)} \int\limits_{S_\varepsilon} f\, d\mu,$$

де S_ε — множина точок X, що знаходять від S на відстані, не більшій за ε.

Мотивацією такого визначення поверхневої міри є бажання пов'язати міри μ та μ^S аналогічно тому, як пов'язані лебегів об'єм та лебегова площа у скінченновимірному випадку.

Вказану міру отримано для випадку поверхні S, що однозначно проектується на деякий підпростір L в X, нормаль якого n_L є допустимим зсувом міри μ (тобто міра μ_n, що визначається рівністю $\mu_n(A) = \mu(A-n)$ є абсолютно неперервною відносно міри μ). На поверхню S окрім того накладено ряд інших умов.

Незважаючи на те, що клас поверхонь, для яких вказана міра існує, є доволі специфічним, в роботі [39] закладено початок теорії інтегрування в нескінченновимірних просторах (гільбертових) та отримано варіант формули Остроградського-Гаусса (з залученням великої кількості додаткових умов, накладених на поверхню, міру та функцію).

Значний внесок у розвиток теорії інтегрування на нескінченновимірних просторах було зроблено А. В. Углановим. Основи було закладено у роботах [26, 41] з використанням ідей диференційовних мір. Вдалося побудувати змістовну теорію поверхневого інтегрування в банахових просторах, яка знайшла серйозні використання в таких областях, як нескінченновимірні розподіли і диференціальні рівняння, випадкові процеси, наближення функцій нескінченновимірного аргументу, векторне інтегрування, варіаційне числення на банахових просторах. А. В. Углановим та іншими було опубліковано ряд робіт із застосувань вказаної теорії. Наведемо її основні положення.

Нехай B — сепарабельний банахів простір; B_0 — щільна лінійна підмножина в B; M^1 — множина всіх борелівських мір на B, диференційовних уздовж усіх напрямків з B_0; Ω — гіперповерхня класу C^1 в B; $M(\Omega)$ — множина всіх σ-скінченних борелівських мір на Ω; $u\colon B \to \mathbb{R}$ — функція, що має неперервну похідну Фреше u'; $\Omega_t = \big\{x \in B \mid u(x) = t\big\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.5. *Існує (будується конструктивно) лінійне відображення $\mu \mapsto$ $\mapsto \mu_\Omega$, що діє з M^1 в $M(\Omega)$, яке задовольняє властивості:*

1) Якщо $\mu = \nu$ в околі Ω, то $\mu_\Omega = \nu_\Omega$.

2) $(u\mu)_\Omega = u\mu_\Omega$.

3) Якщо $|\mu|\big\{x \in B \mid u'(x) = 0\big\} = 0$, то для будь-якої μ-інтегровної функції $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$ справедливою є рівність

$$\int\limits_B \varphi\, d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Omega_t} \varphi \|\mu'\|^{-1}\, d\mu_{\Omega_t}\, dt.$$

4) Якщо μ — ймовірність, то $\mu_\Omega \geqslant 0$ і в припущеннях п. (3) для умовного математичного сподівання $E(\varphi|\mu)$ справедлива формула

$$E(\varphi|\mu) = \left[\ \int\limits_{\Omega_{u(x)}} \|u'\|\, d\mu_{\Omega_{u(x)}}\right]^{-1} \int\limits_{\Omega_{u(x)}} \varphi\|u'\|^{-1}\, d\mu_{\Omega_{u(x)}}.$$

5) Якщо B_0 — гільбертів простір, то справедливими є формули Гаусса-Остроградського та (обидві) Гріна.

6) Якщо $\dim B < \infty$, μ — міра Лебега, то μ_Ω є класичною поверхневою мірою на Ω.

Однак вказана теорія мала ряд недоліків:

1) Інтегрування є можливим лише на поверхнях, гладких за усіма напрямками, що є суттєвим при розгляді просторів з малим запасом диференційовних

функцій.

2) Наріжним каменем всієї конструкції є теорема інваріантності, доведена лише за умовою подвійної гладкості (міри та поверхні), через що виникала необхідність завищення класу гладкості об'єктів, що розглядаються.

3) Всі результати отримано для випадку сепарабельного банахового простору.

У більш пізніх роботах автором були усунені вказані недоліки і розвинено апарат поверхневого інтегрування в просторах Фреше, в основі якого лежить конструктивна побудова локальних поверхневих мір в достатньо малих околах точок поверхонь ([42, 56]). Однак недоліком методу А. В. Угланова є його технічна складність.

Слід також відзначити ще один напрям розвитку теорії поверхневого інтегрування, початок якого було закладено P. Malliavin та H. Airault в роботі [52] для випадку вінеровської міри. В. I Богачовим у роботах [5, 48] вказаний підхід було узагальнено на випадок диференційовних мір. У роботах [37,38] О. В. Пугачова вказаний підхід отримав подальшого розвитку для не обов'язково гауссівських мір (достатнього класу гладкості) для більш широкого класу просторів та поверхонь. Розглядаються міри на поверхнях рівня соболевських функцій, умова неперервності при цьому відсутня, що відповіє типовим функціям, що виникають у випадкових процессах. Міра будується одразу на всій поверхні, а умови гладкості поверхні пов'язані не з геометрією охоплюючого простору, а з з геометрією підпростору Камерона-Мартіна. Побудову здійснено також для випадку локальних соболевських функцій та заданих ними поверхонь і отримано ще один варіант формули Остроградського-Гаусса.

Ю. Л. Далецький та Б. Д. Марянин почали розгляд поверхневих мір на абстрактних многовидах [18].

Ю. В. Богданським у роботі [9] було запропоновано принципово інший підхід до побудови асоційованої міри для замкненої поверхні корозмірності 1, причому вказаний метод може бути використаний для поверхонь, вкладених як у лінійний простір, так і в в нелінійний многовид.

Нехай M є банаховим многовидом класу C^2 з рівномірною структурою, моделлю якого є банахів простір E.

Означення 1.7. *Підмножина $S \subset M$ називається вкладеним підмноговидом в M корозмірності 1, якщо існують многовид N з обмеженою структурою, модельним простором якого є підпростір E_1 в E корозмірності 1, $t_0 > 0$ і обмежений ізоморфізм $g\colon N \times (-t_0, t_0) \to U \subset M$ на відкритий підмноговид U в M, при якому $g(N \times \{0\}) = S$.*

Означення 1.8. *Векторне поле $Z \in C_b^1$ називається строго трансверсальним до S, якщо існує таке $\delta > 0$, що для кожної точки $p \in S$: $\rho(Z(p), T_pS) \geqslant \delta$.*

Розглядається випадок, коли на M задано деяку область G, межа якої $S = \partial G$ є вкладеним у M підмноговидом корозмірності 1.

Для узгодженої з областю G міри μ (тобто такої, що існує векторне поле класу C_b^1, строго трансверсальне до $S = \partial G$, уздовж якого міра μ є диференційовною за Фоміним) будується поверхнева міра (першого типу) σ_Z таким чином, що рівність

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t G} f\, d\mu = \int\limits_S f\, d\sigma_Z$$

виконується для всіх функцій f класу C_b, сталих на траєкторіях векторного поля Z поблизу поверхні S.

При цьому має місце умова узгодженості, що формулюється в наступній теоремі.

Теорема 1.6. *Нехай векторні поля $Z_1, Z_2 \in C_b^1(M)$ є строго трансверсальними до S і поле $Z_1 - Z_2$ дотичне до S. Крім того, нехай міра μ є диференційовною уздовж обох полів Z_1 та Z_2. Тоді $\sigma_{Z_1} = \sigma_{Z_2}$.*

Означення 1.9. *Нехай ω — диференціальна 1-форма класу C_b^1, визначена в околі S_ε межі S області G і $i^*\omega = 0$, де i — вкладення S в M. Нехай для деякого (а тому і для будь-якого еквівалентного) обмеженого атласу Ω на M, підпорядкованого даній обмеженій структурі, виконується умова: існує $\delta > 0$,* *для якого для будь-якого $x \in S_\varepsilon$ і карти $(U, \varphi) \in \Omega$ в точці x для представлення ω в цій карті має місце нерівність $\left\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\right\| > \delta$. Тоді форма ω називається фундаментальною формою поверхні S.*

Виявляється, що для будь-якого вкладеного в M підмноговиду існує фундаментальна форма. Якщо область G є узгодженою з мірою μ, а ω — фундаментальна форма поверхні $S = \partial G$, тоді поверхнева міра на S (другого типу) визначається рівністю

$$\mu_\omega = \frac{1}{\omega(Z)}\Big|_S \cdot \sigma_Z.$$

Зрозуміло, що якщо є дві фундаментальні форми поверхні, що співпадають на S, то відповідні поверхневі другого типу також збігаються.

Адекватність наведеного вище підходу, запропонованого у роботі [9], підтверджується отриманим варіантом формули Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_G \mathrm{div} X \, d\mu = \int\limits_S \omega(X) \, d\mu_\omega$$

для випадку узгодженої з областю G та диференційовної уздовж X міри μ.

У роботах [11, 12] за допомогою описаної вище конструкції перенесено на нескінченновимірний випадок ряд результатів класичної скінченновимірної теорії крайових задач.

1.5 Висновки за розділом

У даному розділі здійснено огляд літератури за темою дисертаційного дослідження. Розглянуто клас банахових многовидів зі спеціальною структурою — банахові многовиди з рівномірною структурою, та вказано деякі їх властивості. Наведено основні означення та властивості з теорії диференційовних мір та вказано різні підходи до визначення диференційовних мір. Розглянуто диференційовність за Фоміним та за Скороходом, уздовж напрямків та уздовж векторних полів, на лінійних просторах та нелінійних многовидах, визначено зв’язок між ними. Наведено огляд підходів до побудови поверхневих мір в нескінченновимірних просторах.

РОЗДІЛ 2
КОНСТРУКЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ МІР НА БАНАХОВИХ МНОГОВИДАХ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

У даному розділі запропоновано метод побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид з обмеженою структурою. Ідея, запропонована в роботі [9] для замкнених поверхонь корозмірності 1, розповсюджується на випадок не обов'язково замкнених вкладених поверхонь довільної скінченної корозмірності. Наведені у даному розділі результати представлено у роботі [13].

Для борелівської міри на многовиді будується асоційована з нею поверхнева міра за допомогою набору строго трансверсальних до поверхні векторних полів, що попарно комутують. Під дією потоку вказаного набору векторних полів поверхня переходить у деякий окіл на многовиді, для якого визначено вихідну міру. Граничним переходом одержується значення бажаної поверхневої міри.

Далі вважаємо, що M є зв'язним банаховим многовидом класу C^2, наділеним обмеженою структурою.

Якщо (M_1, Ω_1) і (M_2, Ω_2) — банахові многовиди з обмеженими атласами і модельними просторами E_1 і E_2, то на $M_1 \times M_2$ визначено обмежений атлас $\Omega_1 \times \Omega_2 := \big\{(U \times V, \varphi \times \psi) \mid (U, \varphi) \in \Omega_1;\ (V, \psi) \in \Omega_2\big\}$, тому $M_1 \times M_2$ також є многовидом з обмеженою структурою і модельним простором $E_1 \dotplus E_2$.

Якщо V — відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, то для многовиду з обмеженим атласом (M, Ω) обмежену структуру на $M \times V$ домовимося задавати атласом $\Omega \times id = \big\{(U \times V, \varphi \times id) \mid (U, \varphi) \in \Omega\big\}$.

2.1 Вкладена поверхня скінченної корозмірності

Означення 2.1. *Підмножину $S \subset M$ назвемо (вкладеною) поверхнею в M скінченної корозмірності m, якщо існує многовид N з обмеженою структурою, модельним простором якого є підпростір E_1 в E корозмірності m, відкритий окіл V нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ та обмежений ізоморфізм $g\colon N \times V \to U \subset M$ на відкриту підмножину U в M, для якого $g\big(N \times \{\vec{0}\}\big) = S$.*

Далі вважається, що на M зафіксовано обмежений атлас $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$, узгоджений з вихідною обмеженою структурою, а тому і відповідна метрика. Всюди далі будемо використовувати наступні позначення: відображення $P_1\colon N \times V \to N$ та $P_2\colon N \times V \to V$ — проектори на першу та другу координату відповідно; $i_1\colon N \to N \times V$ — оператор підняття, $i_1(x) = (x, \vec{0})$. Якщо поверхня S вкладена у многовид M то через g_N будемо позначати ізоморфізм $g_N\colon N \to S$, $N \ni x \mapsto g(x, \vec{0}) \in S$, тобто $g_N = g \circ i_1$, $g_N^{-1} = P_1 \circ g^{-1}$.

Модельним простором многовиду $N \times V$ є банахів простір $E_1 \dot{+} \mathbb{R}^m$ $\big($з нормою $\|\langle \xi, \vec{h} \rangle\| = \|\xi\| + \|\vec{h}\|\big)$, топологічно ізоморфний простору E. При цьому, якщо на N зафіксовано обмежений атлас Ω_N і відповідна метрика ρ_N, то метрика $\rho_{N\times V}$, що визначається обмеженим атласом $\Omega_N \times id$ на $N \times V$, задається формулою:

$$\rho_{N\times V}\big(\langle a, u\rangle, \langle b, v\rangle\big) = \rho_N(a, b) + \|u - v\|, \qquad a, b \in N;\; u, v \in V. \tag{2.1}$$

Дійсно, $\rho_{N\times V}\big(\langle a, u\rangle, \langle b, v\rangle\big)$ є точною нижньою гранню довжин всеможливих кусково-гладких кривих Γ, що з'єднують вказані точки. Беремо деяку кусково-гладку кривую $\Gamma\colon [0, 1] \to M \times V$, $\Gamma(t) = \big\langle c(t), w(t) \big\rangle$, $\Gamma(0) = \langle a, u\rangle$, $\Gamma(1) = \langle b, v\rangle$. Для карти $\varphi \times id$ представлення Γ має вигляд: $\Gamma_{\varphi\times id}(t) =$

$= \big\langle (\varphi \circ c)(t), w(t) \big\rangle$ (для тих t, для яких права частина має зміст). Тоді

$$L(\Gamma) = \sup_{\Delta}\big\{l(\Gamma;\Delta)\big\} = \sup_{\Delta}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\big\|(\Gamma_{\varphi_k \times id})'(\tau)\big\|\,d\tau\right\} =$$
$$= \sup_{\Delta}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\Big[\big\|(\varphi_k \circ c)'(\tau)\big\| + \big\|w'(\tau)\big\|\Big]\,d\tau\right\} =$$
$$= \sup_{\Delta}\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\big\|(\varphi_k \circ c)'(\tau)\big\|\,d\tau + L(w)\right\} = L(c) + L(w).$$

Враховуючи незалежність кривих w і c та взаємно однозначну відповідність між парами кривих $\langle c, w\rangle$ та кривими Γ, отримуємо, що $\inf\limits_{\Gamma} L(\Gamma) = \inf\limits_{c} L(c) + \inf\limits_{w} L(w) = \rho_N(a,b) + \rho_{\mathbb{R}^m}(u,v)$, звідки і випливає рівність (2.1).

З рівності (2.1) випливає, що якщо V містить замкнену кулю $\overline{B}_r$ з центром в $\vec{0}$ радіусу r, то для метрики $\rho_{N\times V}$ виконується наступна умова:

$$(p, q \in N;\ \vec{v} \in V \backslash B_r) \Longrightarrow \Big(\rho_{N\times V}\big(\langle p, \vec{v}\rangle, \langle q, \vec{0}\rangle\big) \geqslant r\Big).$$

Оскільки морфізм $g^{-1}\colon U \to N \times V$ задовольняє умову Ліпшиця відносно метрик ρ на M і $\rho_{N\times V}$ на $N \times V$, то існує $\delta > 0$, для якого виконана умова:

$$\big(x \in S;\ y \in g(N \times (V\backslash B_r))\big) \Longrightarrow \big(\rho(x,y) \geqslant \delta\big). \qquad (2.2)$$

Дійсно, існує таке $L > 0$, що $\rho_{N\times V}\big(g^{-1}(u), g^{-1}(v)\big) \leqslant L\rho(u,v)$ для всіх $u, v \in U \subset M$. Тоді для $x = g(q,\vec{0}) \in S$, $y = g(p,\vec{v}) \in g\big(N \times (V\backslash B_r)\big)$ маємо:

$$\rho(x,y) \geqslant \frac{1}{L}\,\rho_{N\times V}\big(\langle p,\vec{v}\rangle, \langle q,\vec{0}\rangle\big) \geqslant \frac{r}{L} = \delta,$$

що і означає умову (2.2).

Для $\varepsilon > 0$ визначимо підмножину $S_{-\varepsilon} \subset S$ умовою:

$$(x \in S_{-\varepsilon}) \Longleftrightarrow \Big(x \in S; \big\{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\big\} \subset U\Big), \tag{2.3}$$

тобто $S_{-\varepsilon} = \big\{x \in S \mid B_\varepsilon(x) \subset U\big\} = \big\{x \in S \mid \rho(x, M \backslash U) \geqslant \varepsilon\big\}$. Тоді існує таке $\alpha > 0$, що $S_{-\varepsilon} \neq \varnothing$ для $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Крім того, враховуючи умову (2.2), при $\varepsilon < \delta$ для $y \in S_{-\varepsilon}$ маємо $B_\varepsilon(y) \subset g(N \times B_r)$. Для кожного ε очевидним є також включення $(S_{-\varepsilon})_\varepsilon \subset U$ (тут і далі A_ε — ε-окіл множини A).

Множина $N \times \{\vec{0}\}$ є борелівською в $N \times V$, а тому, оскільки $g\colon N \times V \to U$ — гомеоморфізм, то $S \in \mathcal{B}(M)$.

З неперервності функції $f(x) = \rho(x, M \backslash U)$ і рівності

$$S_{-\varepsilon} = S \bigcap \big\{x \mid f(x) \geqslant \varepsilon\big\}$$

випливає, що $S_{-\varepsilon} \in \mathcal{B}(S)$, і послідовність множин $\Big\{S_{-\frac{1}{n}}\Big\}$ зростає до S.

Покажемо, що $S_{-\varepsilon} = \overline{S} \bigcap \big\{x \mid f(x) \geqslant \varepsilon\big\}$, а тому $S_{-\varepsilon}$ — замкнена в M. Нехай $x \in \overline{S} \bigcap \big\{x \mid f(x) \geqslant \varepsilon\big\}$, тоді $\rho(x, M \backslash U) \geqslant \varepsilon$, тобто $x \in U$, $x = g(u, \vec{v})$. Крім того, існує послідовність $\big\{x_n = g(u_n, \vec{0})\big\} \subset S$, що прямує до x. Тоді $g^{-1}(x_n) = (u_n, \vec{0})$ збігається до $g^{-1}(x) = (u, v)$, тобто $\vec{v} = \vec{0}$ і $x \in S$.

Твердження 2.1. *Якщо S — замкнена поверхня в банаховому многовиді M з рівномірною структурою, то $S_{-\varepsilon} = S$ при $\varepsilon \in (0, \delta)$, де δ визначено в нерівності* (2.2).

Доведення. Випадок $U = M$ є очевидним. Нехай $M \neq U$ і $S_{-\varepsilon} \neq S$ при $\varepsilon \in (0, \delta)$. Тоді існують точки $x \in S$ і $y \in M \backslash U$, для яких $\rho(x, y) < \varepsilon < \delta$, а тому для деякої кривої $\Gamma\colon [0, 1] \to M$, що з'єднує точки x та y, має місце нерівність $L(\Gamma) < \delta$. Для кожного $s \in [0, 1]$: $\rho\big(x, \Gamma(s)\big) \leqslant L\big(\Gamma\big|_{[0,s]}\big) \leqslant L(\Gamma) < \delta$, тому образ кривої Γ повністю лежить в $B_\delta(x)$. Множина $A = \Gamma^{-1}(M \backslash U) = \{s \in [0, 1] \mid \Gamma(s) \notin U\}$ є непорожньою ($1 \in A$) та замкненою, а отже, існує $\xi = \inf A = \min A$, причому $\xi > 0$, оскільки $\Gamma(0) = x \in U$. Таким чином точка $z = \Gamma(\xi)$ не належить множині U, а для кожного $s < \xi$: $\Gamma(s) \in U = g(N \times V)$, причому $\rho\bigl(x, \Gamma(s)\bigr) \leqslant \delta$. Врахувавши умову (2.2), отримуємо включення $\Gamma\bigl([0, \xi)\bigr) \subset g(N \times B_r)$.

Розглянемо послідовність s_n, що монотонно зростає до ξ, і обмежений ізоморфізм $h = (l_M \times id) \circ (g_N \times id) \circ g^{-1} \colon g(N \times \overline{B}_r) \to M \times \overline{B}_r$, де $l_M \colon S \to M$ — вкладення. Тоді $z_n = \Gamma(s_n) \to z$, тому послідовність z_n фундаментальна в M, а функція h задовольняє умову Ліпшиця, отже, $h(z_n)$ — фундаментальна в $M \times \overline{B}_r$, і завдяки повноті M існує границя $(m, w) \in M \times \overline{B_r}$: $h(z_n) = (u_n, w_n) \to (m, w)$. Але $u_n \in S$, а S — замкнена, тому $m \in S$, звідки $(m, w) \in Im(h)$ і $z_n = h^{-1}(u_n, w_n) \to h^{-1}(m, w)$. Тобто $z = h^{-1}(m, w) \in g(N \times \overline{B}_r) \subset U$. Суперечність. ■

Якщо поверхня S вкладена у многовид M, то за допомогою функції g_N на S визначено обмежену структуру, запозичену з N. Якщо $\Omega_N = \bigl\{(W_\alpha, \psi_\alpha)\bigr\}$ — обмежений атлас на N, тоді $\Omega_S = \Bigl\{\bigl(g_N(W_\alpha), \psi_\alpha \circ g_N^{-1}\bigr)\Bigr\} = \bigl\{(V_\alpha, \tau_\alpha)\bigr\}$ є обмеженим E_1-атласом на S. Крім того, визначено атлас Ω_M на M, що узгоджується з вихідною обмеженою структурою (що діє в простір $E_1 \dotplus \mathbb{R}^m$, лінійно гомеоморфний E):

$$\Omega_M = \Bigl\{\bigl(g(W_\alpha \times V), (\psi_\alpha \times id) \circ g^{-1}\bigr)\Bigr\} = \bigl\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\bigr\}. \tag{2.4}$$

Для кожної точки $x \in S$ дотичний простір T_xS є підпростором T_xM, причому для представлення у відповідних картах атласів Ω_M та Ω_S має місце розклад $(T_xM)_\varphi = (T_xS)_\tau \dotplus \mathbb{R}^m$.

Твердження 2.2. *Якщо S — вкладена в M поверхня корозмірності m, то для будь-якої точки $y \in S$ існує карта (D, φ) в точці y на M (сумісна з атласом Ω), така, що: $\varphi \colon D \to D_1 \times D_2 \subset E_1 \times \mathbb{R}^m$ — дифеоморфізм, а $\varphi(D \cap S) = D_1 \times \{\vec{0}\}$.*

Доведення. Для $y \in S$ в якості (D, φ) беремо карту з атласу Ω_M, визначеного в умові (2.4). Тоді під дією φ множина $D = g(W \times V)$ переходить у

$\psi(W) \times V \subset E_1 \times \mathbb{R}^m$ і при цьому $\varphi(D \cap S) = \varphi\Big(g(W \times V) \cap g\big(N \times \{\vec{0}\}\big)\Big) =$
$= \varphi\Big(g\big(W \times \{\vec{0}\}\big)\Big) = \varphi(W) \times \{\vec{0}\}$. ■

Зауваження 2.1. *У роботі [31, с. 34] наводиться наступне означення підмноговиду банахового многовиду M. Підмножина $Y \subset M$ називається підмноговидом M, якщо для кожного $x \in Y$ існує карта (ψ, V) на M, що задає ізоморфізм на декартовий добуток $V_1 \times V_2$ відкритих підмножин в банахових просторах E_1 та E_2 відповідно, і при цьому $\varphi(Y \cap V) = V_1 \times \{0\}$. Таким чином, з твердження 2.2 випливає, що вкладена поверхні скінченної корозмірності (відповідно до означення 2.1) є частковим випадком підмноговиду.*

2.2 Асоційована форма поверхні

Означення 2.2. *Нехай S — поверхня в M корозмірності m; $g\colon N \times V \to$ $\to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення поверхні S в M; ω — диференціальна m-форма класу C_b^1, визначена на U (або на більшій відкритій підмножині в M). Нехай для будь-якої точки $x \in S$ простір T_xS є асоційованим підпростором зовнішньої форми $\omega(x)$ в просторі T_xM $\Big($інакше кажучи, $T_xS = \big\{Y \in T_xM \mid i_Y\omega(x) = 0\big\}$, де i_Y — внутрішній добуток зовнішньої форми $\omega(x)$ на вектор $Y\Big)$. Додатково припускаємо, що для деякого (а тому і для будь-якого еквівалентного) обмеженого атласу Ω на M, підпорядкованого даній обмеженій структурі, виконується умова: існує $\alpha > 0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in (0, \alpha)$ можна знайти $\delta > 0$, для якого для будь-яких $x \in S_{-\varepsilon}$ і карти $(U, \varphi) \in \Omega$ в точці x (т.е. $x \in U$) для представлення ω в цій карті має місце нерівність $\Big\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\Big\| \geqslant \delta$. Тоді форму ω назвемо асоційованою формою поверхні S.*

Якщо через $\big|\big|\big|T(p)\big|\big|\big|_p$ позначити норму значення тензорного поля T в просторі $\big(T_pM, |||\cdot|||_p\big)$, то остання умова в означенні 2.2 допускає еквівалентне формулювання:

$$\exists\,\alpha > 0 \;\; \forall\,\varepsilon \in (0,\alpha) \;\; \exists\,\delta > 0 \;\; \forall\,x \in S_{-\varepsilon}: \quad \left|\left|\left|\omega(x)\right|\right|\right|_x \geqslant \delta.$$

Таким чином, означення асоційованої форми поверхні є інваріантним відносно переходу до еквівалентного обмеженого атласу.

В наступному твердженні наведені елементарні властивості диференціальних форм класу C_b^1 (перевіряються безпосередньо).

Твердження 2.3. *Нехай ω — диференціальна m-форма класу C_b^1, визначена на деякій множині $U \subset M$. Тоді:*
а) якщо функція $f\colon M \to \mathbb{R}$ має клас гладкості C_b^1, то диференціальна форма $\nu = f\omega$ також належить до класу $C_b^1(U)$;
б) якщо N — банахів многовид з обмеженою структурою і $h\colon N \to U$ є обмеженим морфізмом класу C_b^2, то диференціальна форма $\alpha = h^*\nu$ належить до класу $C_b^1(N)$;
в) якщо ν — диференціальна n-форма класу $C_b^1(U)$, то $\omega \wedge \nu$ є диференціальною $m+n$-формою класу $C_b^1(U)$.

У наступному прикладі наводиться конструкція асоційованої форми для довільної вкладеної поверхні скінченної корозмірності.

Приклад 2.1. *Нехай $g\colon N \times V \to g(N \times V) = U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладену поверхню S корозмірності m. Нехай B_r — куля радіусу $r > 0$ з центром в $\vec{0}$, компактно вкладена в V ($\overline{B}_r \subset V$); h — неперервно диференційовна функція на V, для якої $h(\vec{0}) \neq 0$, $h(\vec{v}) = 0$ для $\vec{v} \notin B_r$. Нехай P_2 — проекція $N \times V$ на V. Тоді визначена на U m-форма $\omega = \left(g^{-1}\right)^* P_2^*(h\,dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m)$ задовольняє всі умови m-форми, асоційованої з поверхнею S.*

Доведення. Гладкість ω класу C_b^1 випливає з твердження 2.3. Для $x = g(z,\vec{v}) \in$

$\in U$ та $u_1, \ldots, u_m \in T_xM$ маємо:

$$\omega(x)(u_1, \ldots, u_m) = h(\vec{v}) \cdot (dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m)\big(T_x(P \circ g^{-1})u_1, \ldots, T_x(P_2 \circ g^{-1})u_m\big).$$

Тоді для $x \in S$:

$$\big\{Y \in T_xM \mid i_Y\omega(x) = 0\big\} = \big\{Y \in T_xM \mid T_x(P_2 \circ g^{-1})Y = 0\big\} = T_xS.$$

Оскільки асоційованість форми не залежить від вибору обмеженого атласу, можемо взяти на M атлас Ω_M (див. (2.4)). Тоді для точки $x = g(z, 0) \in S$, що належить області визначення деякої карти $\varphi = (\psi \times id) \circ g^{-1}$ представлення w_φ форми ω в карті φ має вигляд:

$$\omega_\varphi\big((\varphi(x)\big)\big((u_1)_\varphi, \ldots, (u_m)_\varphi\big) = h(\vec{0}) \cdot \det\big(\ \pi_{E_1}(u_1)_\varphi \quad \ldots \quad \pi_{E_1}(u_m)_\varphi\ \big),$$

де π_{E_1} — проектор з E на E_1. Тоді:

$$\begin{aligned}\Big\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\Big\| &= \big|h(\vec{0})\big| \cdot \sup_{e_1,\ldots e_m \in E} \frac{\Big|\det\big(\ \pi_{E_1}e_1 \quad \ldots \quad \pi_{E_1}e_m\ \big)\Big|}{\|e_1\| \cdot \ldots \cdot \|e_m\|} \geqslant \\ &\geqslant \big|h(\vec{0})\big| \cdot \sup_{e_1,\ldots e_m \in E_1} \frac{\Big|\det\big(\ e_1 \quad \ldots \quad e_m\ \big)\Big|}{\|e_1\| \cdot \ldots \cdot \|e_m\|} = \big|h(\vec{0})\big| \cdot \|\det{}_m\|.\end{aligned}$$

Отже, диференціальна форма ω задовольняє всі умови означення 2.2. ■

Зауваження 2.2. *Помітимо, що побудована в даному прикладі форма ω є замкненою.*

2.3 Трансверсальні набори векторних полів

Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g\colon N \times V \to U \subset \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення S в M и ω — асоційована m-форма поверхні S. Розглянемо набір визначених на U (або на більшій відкритій підмножині в M) векторних полів $\vec{Z} := \{Z_1, Z_2 \dots, Z_m\}$ класу C_b^1.

Означення 2.3. *Набір векторних полів* $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2 \dots, Z_m\}$ *назвемо трансверсальним до* S*, якщо для кожної точки* $x \in S$ *має місце нерівність:* $\omega(\vec{Z})(x) := \omega(Z_1, \dots, Z_m)(x) \neq 0$ *і строго трансверсальним до* S*, якщо існує* $\alpha > 0$ *таке, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що для будь-якого* $x \in S_{-\varepsilon}$ *має місце нерівність:* $\left|\omega(\vec{Z})(x)\right| \geqslant \delta$.

Лема 2.1. *Означення трансверсальності та строгої трансверсальності до* S *набору векторних полів* $\vec{Z}$ *не залежить від вибору асоційованої форми* ω *поверхні* S.

Доведення.

Крок 1. Нехай E_1 — підпростір в E корозмірності m; α та β — дві зовнішні форми на E, для яких $E_1 = \{y \in E \mid i_y\alpha = 0\} = \{y \in E \mid i_y\beta = 0\}$. Доведемо, що α та β колінеарні.

Нехай $\{x_1, \dots, x_m\}$ — лінійно незалежна система векторів з E і $E = E_1 \dot{+}$ л.о.$\{x_1, \dots, x_m\}$. Нехай $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_1$; $\beta(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_2$. Доведемо рівність $c_1\beta - c_2\alpha = 0$. Дійсно, кожний вектор $z_k \in E$ можна представити у вигляді: $z_k = y_k + \lambda_1^{(k)}x_1 + \dots + \lambda_m^{(k)}x_m$, $y_k \in E_1$. Тому:

$$\begin{aligned}
&(c_1\beta - c_2\alpha)(z_1, z_2, \dots, z_m) = \\
&\qquad = (c_1\beta - c_2\alpha)\left(y_1 + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(1)}x_i, \dots, y_m + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(m)}x_i\right) = \\
&\qquad = det\left(\lambda_i^{(j)}\right)\big(c_1\beta(x_1, x_2, \dots, x_m) - c_2\alpha(x_1, x_2, \dots, x_m)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Крок 2. Нехай ω_1 та ω_2 — дві асоційовані m-форми поверхні S в M. Для будь-якої точки $x \in S$ за кроком 1 відповідні зовнішні форми є колінеарними в просторі T_xM та не рівними нулю. Звідси негайно випливає незалежність умови трансверсальності набору $\vec{Z}$ від вибору асоційованої форми поверхні S.

В той же час, з означення 2.2 асоційованої форми поверхні випливає, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \alpha)$ існують такі константи $\delta, C > 0$, що для кожної карти φ і кожного $x \in S_{-\varepsilon}$ з цієї карти мають місце нерівності: $\delta < \left\|(\omega_1)_\varphi\big(\varphi(x)\big)\right\| < C$, $\delta < \left\|(\omega_2)_\varphi\big(\varphi(x)\big)\right\| < C$. Тому коефіцієнт колінеарності $\lambda(x)$ форм ω_1 та ω_2 в точках $x \in S_{-\varepsilon}$ $\big(\omega_1(x) = \lambda(x)\omega_2(x)\big)$ задовольняє умови: $\sup\limits_{S_{-\varepsilon}}\big|\lambda(\cdot)\big| < \dfrac{C}{\delta} < \infty$, $\inf\limits_{S_{-\varepsilon}}\big|\lambda(\cdot)\big| > \dfrac{\delta}{C} > 0$, що доводить незалежність умови строгої трансверсальності набору $\vec{Z}$ від вибору асоційованої форми поверхні. ■

Зауваження 2.3. *Неважко перевірити, що умова асоційованої m-форми поверхні S та умова трансверсальності (строгої трансверсальності) набору векторних полів не зміниться при переході до еквівалентного обмеженого атласу, а тому визначається лише вибором обмеженої структури.*

В подальшому нас будут цікавити строго трансверсальні до S набори векторних полів, що попарно комутують.

Позначимо через $\Phi_t^X = \Phi^X(t;\cdot)$ потік векторного поля X (визначений локально) і для набору векторних полів $\vec{Z} = \{Z_1, Z_2 \ldots, Z_m\}$, що попарно комутують, покладемо: $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} := \Phi_{t_1}^{Z_1}\Phi_{t_2}^{Z_2}\ldots\Phi_{t_m}^{Z_m}$ $\big($тут $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m\big)$. Значення $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}$ не залежить від порядку множників завдяки комутації векторних полів набору $\vec{Z}$. При цьому $\Phi_{\vec{t}+\vec{s}}^{\vec{Z}} = \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}\Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}} = \Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}}\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}$. Покладемо також $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \mid x \in A\}$, $\Phi_W^{\vec{Z}}A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}}(x) \mid \vec{t} \in W; x \in A\}$.

Для векторних полів класу C_b^1 також має місце аналог твердження 2.3.

Твердження 2.4. *Нехай $f\colon M \to N$ — обмежений C^2-ізоморфізм двох банахових многовидів з обмеженою структурою, X — векторне поле класу C_b^1 на $U \subset M$. Тоді $Y = f_*X$ є векторним полем класу C_b^1 на $f(U) \subset N$, і його потік визначається за формулою (при тих $t \in \mathbb{R}$, при яких права частина має зміст):*

$$\Phi_t^Y(x) = (f \circ \Phi_t^X \circ f^{-1})(x)$$

Остання рівність, зокрема, означає, що якщо поля X та Z класу $C_b^1(U)$ комутують, то такими є і поля f_*X та f_*Z на $f(U)$.

Наведемо тепер приклад строго трансверсального до S набору векторних полів, що попарно комутують.

Приклад 2.2. *Нехай $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, який визначає S, і нехай куля $W = B_r \subset \mathbb{R}^m$ компактно вкладена в V. Відображення $f\colon \vec{s} \mapsto \dfrac{2r}{\pi} \cdot \dfrac{\operatorname{arctg}\|\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}\vec{s}$ ($\vec{s} \neq 0$), $h(\vec{0}) = \vec{0}$ дифеоморфно відображує $\mathbb{R}^m$ на кулю $W = B_r(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^m$. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — векторні поля на W, f-зв'язані з полями $\dfrac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial s_m}$ на $\mathbb{R}^m$, а поля $\eta_1, \ldots, \eta_m$ на V отримані продовженням полів ξ_k нулем ззовні W. Якщо $P\colon N \times V \to V$ — проекція на другий множник, то поля $Y_1, \ldots, Y_m$ на $N \times V$, P-зв'язані з полями $\eta_1, \ldots, \eta_m$, попарно комутують та утворюють строго трансверсальний набір до поверхні $N \times \{\vec{0}\}$. Шуканий набір векторних полів складається з полів $Z_1, \ldots, Z_m$, g-зв'язаних з $Y_1, \ldots, Y_m$. Окрім того, побудовані поля Z_k є повними, а відображення потоку $\Phi^{\vec{Z}}\colon S \times \mathbb{R}^m \to \Phi_{R^m} S$ взаємно однозначним.*

Доведення. Векторні поля η_i представляються у вигляді: $\eta_i(\vec{x}) = F(\vec{x})\dfrac{\partial}{\partial s_i}$, де $F\colon V \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $F(\vec{x}) = f'\big(f^{-1}(\vec{x})\big)$, якщо $\vec{x} \in W$ та $F(\vec{x}) = 0$, якщо $\vec{x} \in V \backslash W$. Враховуючи граничні умови, накладені на функцію f, отримуємо гладкість класу C_b^1 функції F на V, а тому поля $\eta_1, \ldots, \eta_m$ належать до класу C_b^1 та попарно комутують. Попарна комутація та належність до класу $C_b^1(N \times V)$ полів $Z_1, \ldots, Z_m$ випливає з твердження 2.4, причому поля Z_k є нульовими на $g(V \times V \backslash W)$.

Перевіряємо тепер строгу трансверсальність до S набору $\vec{Z}$. За лемою 2.1 в якості асоційованої форми поверхні S можемо взяти форму $\omega = \big(g^{-1}\big)^* P_2^*(h\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m)$ з прикладу 2.1. Тоді для $x = g(z, \vec{v}) \in U$:

$$\omega(\vec{Z})(x) = h(\vec{v}) \cdot \big(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m\big)\big(\eta_1(\vec{v}), \ldots, \eta_m(\vec{v})\big).$$

При $x \in S$ отримуємо:

$$\omega(\vec{Z})(x) = h(\vec{0}) \cdot \big(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m\big)\left(f'(\vec{0})\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, f'(\vec{0})\frac{\partial}{\partial s_m}\right) = h(\vec{0}) \det\big(f'(\vec{0})\big),$$

звідки випливає строга трансверсальність до поверхні S набору полів $\vec{Z}$.

І нарешті, перевіримо повноту полів $\vec{Z}$ та взаємну однозначність звуження $\Phi^{\vec{Z}}$ на $S \times \mathbb{R}^m$. За твердженням 2.4 потік набору полів $\vec{\xi}$ визначається за формулою $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{\xi}}(\vec{v}) = f\left(f^{-1}(\vec{v}) + \vec{t}\right)$, $\vec{v} \in W$ та очевидно є повним. Тоді $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{\eta}}(\vec{v}) = \Phi_{\vec{t}}^{\vec{\xi}}(\vec{v})$ при $\vec{v} \in W$ та $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{\eta}}(\vec{v}) = \vec{v}$ при $\vec{v} \in V \backslash W$ для всіх $t \in \mathbb{R}^m$. Для полів з набору $\vec{Y}$ одержуємо $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Y}}(z, \vec{v}) = \left(z, \Phi_{\vec{t}}^{\vec{\eta}}(\vec{v})\right)$ і повнота зберігається. При цьому для $(z, \vec{v}) \in N \times \{\vec{0}\}$: $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Y}}(z, \vec{0}) = \left(z, f\left(f^{-1}(\vec{0}) + \vec{t}\right)\right)$ — взаємно однозначно залежить від пари $(z, \vec{t}) \in N \times \mathbb{R}^m$. Отже, необхідна властивість виконується для полів з набору $\vec{Y}$, а тому і для набору $\vec{Z}$. ∎

Лема 2.2. *Нехай векторне поле X належить до класу $C_b^1(U)$. Тоді якщо для $x \in U$, $t \in \mathbb{R}$ визначено $\Phi_t(x) \in U$, то $\rho_M\big(x, \Phi_t(x)\big) \leqslant C(X)\,|t|$, де $C(X)$ — константа з означення обмеженого векторного поля.*

Доведення. Для точок x та $\Phi_t(x)$ можна розглянути гладку криву $\gamma(s) = \Phi_s(x)$, що з'єднує вказані точки. Тоді $\rho_M\big(x, \Phi_t(x)\big) \leqslant L(\gamma) = \sup\limits_{\Delta} l(\gamma, \Delta)$. При цьому для кожного розбиття Δ:

$$l(\gamma, \Delta) = \sum_{k=1}^{m(\Delta)} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \big\|(\varphi_k \circ \Phi_x)'(\tau)\big\|\, d\tau \leqslant \sum_{k=1}^{m(\Delta)} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} C(X)\, d\tau = C(X)\, t.$$

Отже, $\rho_M\big(x, \Phi_t(x)\big) \leqslant C(X)\,|t|$ (для випадку від'ємного t в якості $\gamma(s)$ беремо $\Phi_x(-s)$, $\gamma\colon [0, |t|\,] \to U$). ∎

Як наслідок останньої леми отримуємо можливість продовження інтегральних кривих до границі околу U у випадку повного метричного простору:

Твердження 2.5. *Нехай многовид M є повним метричним простором, а векторне поле X належить до класу $C_b^1(U)$. Тоді для кожного $x \in U$ потік Φ_x є визначеним для кожного $t \in (-R, R)$, де $R = \dfrac{\rho(x, M \backslash U)}{C(X)}$.*

Наступна допоміжна лема є наслідком нерівності Адамара.

Лема 2.3. *Нехай $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \overline{B}_C(0) \subset \mathbb{R}^m$, $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \ldots & \vec{a}_m \end{pmatrix}$ — невироджена. Тоді існує таке $\delta > 0$ (що залежить від C та $\det A$), що для кожного*

$\vec{h} \in \mathbb{R}^m$ *з* $\|\vec{h}\| = 1$ *виконується нерівність*

$$\|A\vec{h}\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} h_k \vec{a}_k \right\| \geqslant \delta.$$

Доведення. Оскільки $\|\vec{h}\| = 1$, існує така координата i, що $|h_i| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Використаємо нерівність Адамара для набору векторів $\{\vec{b}_k\}$, де $\vec{b}_i = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k \vec{a}_k$, а всі інші $\vec{b}_k$ співпадають з відповідними $\vec{a}_k$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} h_k \vec{a}_k \right\| \cdot \prod_{k \neq i} \|\vec{a}_k\| \geqslant \left| \det \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_m \end{pmatrix} \right| = |h_i| \cdot |\det A| \geqslant \frac{|\det A|}{\sqrt{m}}.$$

Врахувавши обмеження на норми $\vec{a}_i$, отримуємо необхідну нерівність з $\delta = \delta(C, \det A) = \dfrac{|\det A|}{C^{m-1}\sqrt{m}}$. ■

Лема 2.4. *Нехай* A *– матриця розміру* $m \times m$*, вектор-стовпці* $\vec{a}_i$ *якої не перебільшують за нормою деяку константу* C*. Тоді якщо* $|\det A| > \alpha > 0$*, то існує обернена матриця* A^{-1} *і при цьому* $\|A^{-1}\| \leqslant \dfrac{\sqrt{m}\, C^{m-1}}{\alpha}$*, де* $\|\cdot\|$ *— операторна норма.*

Доведення. Існування оберненої до A матриці випливає з того, що $\det A \neq 0$. При цьому:

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\vec{u} \neq \vec{0}} \frac{\|A^{-1}\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \sup_{\vec{v} \neq \vec{0}} \frac{\|\vec{v}\,\|}{\|A\vec{v}\,\|} = \sup_{\|\vec{v}\,\|=1} \frac{1}{\|A\vec{v}\,\|} \leqslant \big[\text{лема } 2.3\big] \leqslant \frac{\sqrt{m}\, C^{m-1}}{\alpha}.$$

Наслідок доведено. ■

Покажемо, що поверхня S разом з деяким околом може бути розшарована на інтегральні криві строго трансверсального до неї набору векторних полів. Для доведення цього факту знадобиться допоміжна лема, що уточнює теорему про обернену функцію.

Лема 2.5. *Нехай* D *— деяка відкрита множина в* $\mathbb{R}^m$*;* $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ *— функція класу* C^1_b*, для якої* f' *задовольняє умову Ліпшиця з константою*

$L > 0$; $B_\beta(x_0) \subset D$, $y_0 = f(x_0)$, матриця $f'(x)$ невироджена в околі $B_\beta(x_0)$; $\bigl|\det f'(x_0)\bigr| > \delta > 0$. Тоді існують такі $\alpha > 0$ і $r > 0$, що $B_\alpha(x_0) \subset D$ і при $\varepsilon < \alpha$ множина $f\bigl(B_\varepsilon(x_0)\bigr)$ містить кулю $B_{r\varepsilon}(y_0)$, таку, що відображення $f\colon f^{-1}\bigl(B_{r\varepsilon}(y_0)\bigr) \bigcap B_\varepsilon(x_0) \to B_{r\varepsilon}(y_0)$ є C^1-дифеоморфізмом. При цьому α і r не залежать від функції f і точки x_0, а залежать лише від β, L, δ та константи C, що обмежує $\bigl\|f'(x)\bigr\|$ в кожній точці $x \in D$.

Доведення. Існування оберненої до f функції необхідного класу гладкості в декому околі точки x_0 випливає з теореми про обернену функцію, тому питання виникає лише стосовно радіусів відповідних околів. Взявши за основу доведення теореми про обернену функцію (див., наприклад, [24, с. 380]), уточнимо оцінки для радіусів.

Нехай $A = f'(x_0)$, тоді $\|A\| \leqslant C$ і за лемою 2.4: $\|A^{-1}\| \leqslant \eta = \eta(C,\delta)$. Візьмемо $\alpha = \min\left\{\beta, \dfrac{1}{2\,L\eta}\right\}$. Покажемо, що тоді для $x_1, x_2 \in B_\alpha(x_0)$ має місце нерівність:

$$\Bigl\|x_2 - x_1 - A^{-1}\bigl(f(x_2) - f(x_1)\bigr)\Bigr\| < \frac{1}{2}\,\|x_2 - x_1\|. \tag{2.5}$$

Для цього позначимо через h різницю $x_2 - x_1$ і розглянемо функцію $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $F(t) = f(x_1 + th) - tAh$. Тоді F належить до класу C_b^1 і при цьому для $t \in [0,1]$:

$$F'(t) = f'(x_1 + th)h - Ah,$$

$$\bigl\|F'(t)\bigr\| \leqslant \|f'(x_1 + th) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| \leqslant L\|x_1 + th - x_0\| \cdot \|h\| < L\alpha\|h\| \leqslant \frac{\|h\|}{2\,\eta}.$$

Тоді:

$$\Bigl\|x_2 - x_1 - A^{-1}\bigl(f(x_2) - f(x_1)\bigr)\Bigr\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \bigl\|f(x_2) - f(x_1) - A(x_2 - x_1)\bigr\| =$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \bigl\|F(1) - F(0)\bigr\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \max_{t\in[0,1]}\bigl\|F'(t)\bigr\| < \frac{\|h\|}{2}.$$

Візьмемо тепер $\varepsilon < \alpha$, $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{2\,\eta}$. Зафіксуємо $y \in B_\gamma(y_0)$ і розглянемо функцію g_y на $B_\varepsilon(x_0)$, $g_y(x) = x + A^{-1}\big(y - f(x)\big)$. Функція g_y діє в себе, оскільки

$$\begin{aligned}\big\|g_y(x) - x_0\big\| &= \Big\|x - x_0 + A^{-1}\big(y - f(x)\big)\Big\| \leqslant \\ &\leqslant \Big\|x - x_0 + A^{-1}\big(f(x_0) - f(x)\big)\Big\| + \Big\|A^{-1}\big(y - f(x_0)\big)\Big\| \leqslant \\ &\leqslant [\text{нер. (2.5)}] \leqslant \frac{1}{2}\,\|x - x_0\| + \|A^{-1}\| \cdot \gamma < \varepsilon.\end{aligned}$$

Крім того, g_y є стиском, оскільки для кожного $x \in B_\varepsilon(x_0)$:

$$\big\|g_y'(x)\big\| = \big\|I - A^{-1}f'(x)\big\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \big\|f'(x_0) - f'(x)\big\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot L\|x_0 - x\| < \frac{1}{2}.$$

Отже, за теоремою Банаха існує таке $x_y^* \in B_\varepsilon(x_0)$, що $x_y^* = g_y(x_y^*)$, звідки $f(x_y^*) = y$. Таким чином, побудували обернене відображення $h = f^{-1}$ на $B_\gamma(y_0)$, образ якого міститься в $B_\varepsilon(x_0)$. Залишилося довести, що h має клас гладкості C^1.

Покажемо спершу неперервність h. Для $y_1, y_2 \in B_\gamma(y_0)$, $h(y_1) = x_1$, $h(y_2) = x_2$ маємо нерівність:

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| = \big\|g_{y_1}(x_1) - g_{y_2}(x_2)\big\| &\leqslant \big\|g_{y_1}(x_1) - g_{y_1}(x_2)\big\| + \big\|g_{y_1}(x_2) - g_{y_2}(x_2)\big\| = \\ &= \big\|x_1 - x_2 + A^{-1}(y_2 - y_1)\big\| + \big\|A^{-1}(y_1 - y_2)\big\| \leqslant \big[\text{нер. (2.5)}\big] \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,\|x_2 - x_1\| + \|A^{-1}\| \cdot \|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

звідки

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant 2\,\|A^{-1}\| \cdot \|y_1 - y_2\|, \tag{2.6}$$

що і доводить неперервність відображення h.

Покажемо, нарешті, що h є неперервно диференційовною. Нехай $y \in B_\gamma(y_0)$, $y = f(x)$, $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Доведемо, що існує $h'(y) = \big(f'(x)\big)^{-1}$. Для

$y_1 \in B_\gamma(y_0)$, $h'(y_1) = x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$ маємо:

$$\Big\| h(y_1) - h(y) - \big(f'(x)\big)^{-1}(y_1 - y)\Big\| \leqslant \|f'(x)^{-1}\| \cdot \|f'(x)(x_1 - x) - (y_1 - y)\| = \\ = \|f'(x)^{-1}\| \cdot o\big(\|x_1 - x\|\big) = \big[\text{нер. (2.6)}\big] = o\big(\|y_1 - y\|\big).$$

Отже, h належить до класу C^1, що і завершує доведення твердження. ■

Теорема 2.1. *Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає S. Нехай набір $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ векторних полів класу $C^1_b(U)$, що попарно комутують, є строго трансверсальним до поверхні S. Крім того нехай для заданого $\varepsilon > 0$ існують такі $r_0 > 0$ та $r_1 > 0$, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}$ є визначеним на $B_{r_1}(S_{-\varepsilon}) \times B_{r_0}$ (остання умова виконується, наприклад, у випадку повного метричного простору, див. твердження 2.5). Тоді існує окіл $W = W(\varepsilon)$ нуля в $\mathbb{R}^m$ такий, що:*

а) відображення

$$\Phi^{\vec{Z}}\colon S_{-\varepsilon} \times W \ni (x, \vec{t}\,) \mapsto \Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in \Phi^{\vec{Z}}_W S_{-\varepsilon} \tag{2.7}$$

взаємно однозначне;

б) існує окіл W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для якого $\Phi^{\vec{Z}}_W S_{-\varepsilon} \supset g(N_{-2\varepsilon} \times W_1)$ $\big($тут і далі $N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\} := g^{-1}(S_{-\varepsilon})\big)$.

Доведення. Поверхня $N \times \{\vec{0}\} = g^{-1}(S)$ є вкладеною в $N \times V$ поверхнею корозмірності m. При цьому, якщо визначати множину $\big(N \times \{\vec{0}\}\big)_{-\varepsilon}$ умовою (2.3), то отримуємо $\big(N \times \{\vec{0}\}\big)_{-\varepsilon} = N \times \{\vec{0}\} \neq g^{-1}(S_{-\varepsilon})$. Однак, для кожного $\varepsilon > 0$ можна розглянути множину $N_{-\varepsilon} = g_N^{-1}(S_{-\varepsilon})$. Тоді, якщо ν — асоційована форма поверхні S, то $\omega = g^*\nu$ є асоційованою формою поверхні $N \times \{\vec{0}\}$ (і навпаки) в тому розумінні, коли в означенні 2.2 замість $\big(N \times \{\vec{0}\}\big)_{-\varepsilon}$ береться $N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$. Аналогічно, визначені на $N \times V$ векторні поля $\widetilde{Z_k}$, g-зв'язані з Z_k, попарно комутують та утворюють строго трансверсальный до поверхні $N \times \{\vec{0}\}$ набір векторних полів класу $C_b^1(N \times V)$ (також з заміною $\left(N \times \{\vec{0}\}\right)_{-\varepsilon}$ на $N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$). Таким чином, не втрачаючи загальності, можна для зручності вважати, що $U = N \times V$, не змінюючи при цьому позначення для набору векторних полів і замінюючи S на $N \times \{\vec{0}\}$, $S_{-\varepsilon}$ на $N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$.

Крок 1. Враховуючи незалежність умови строгої трансверсальності набору векторних полів від вибору асоційованої форми (лема 2.1), в якості асоційованої m-форми поверхні $N \times \{\vec{0}\}$ можна взяти

$$\omega(x, \vec{t}) = dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m.$$

Оскільки $T_{(x,\vec{t})}(N \times V) \cong T_{(x,\vec{t})}\left(N \times \{\vec{t}\}\right) \dotplus T_{(x,\vec{t})}\left(\{x\} \times V\right)$, то векторні поля Z_k можна представити у вигляді:

$$Z_k(x, \vec{t}) = Q_k(x, \vec{t}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j(x, \vec{t}) \frac{\partial}{\partial t_j}, \tag{2.8}$$

де $Q_k(x, \vec{t}) \in T_{(x,\vec{t})}(N \times \{\vec{t}\})$ –"горизонтальна складова" векторного поля Z_k. Тому $\omega(x, \vec{t})\left(Z_1(x, \vec{t}), Z_2(x, \vec{t}), \ldots, Z_m(x, \vec{t})\right) = \det\left(\alpha_k^j(x, \vec{t})\right)$.

Оскільки форма ω та поля Z_k належить до класу C_b^1, функція $\det\left(\alpha_k^j(x, \vec{t})\right)$ також належить до класу C_b^1, а тому рівномірно неперервна в $N \times V$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. За умовою строгої трансверсальності існує $\delta > 0$, для якого при всіх $x \in N_{-\varepsilon}$ виконується нерівність:

$$\omega(x, \vec{t})\left(\vec{Z}(x, \vec{t})\right) = \left|\det\left(\alpha_k^j(x, \vec{0})\right)\right| \geqslant \delta. \tag{2.9}$$

Тому існує вкладена в V куля $B_r = \left\{\vec{t} \mid \|\vec{t}\| < r\right\}$ (беремо $r < r_0$), для якої при всіх $(x, \vec{t}) \in N_{-\varepsilon} \times B_r$ має місце нерівність:

$$\left|\det\left(\alpha_k^j(x, \vec{t})\right)\right| > 0. \tag{2.10}$$

За умовою теореми маємо також властивість:

$$\big(x \in N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\};\ \|\vec{t}\| < r\big) \implies \quad (\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in N \times V).$$

Нехай $\{\vec{e_k}\}$ — канонічний ортонормований базис в $\mathbb{R}^m$ і $\|\cdot\|$ — відповідна норма. Для кожного $h \in \mathbb{R}^m$, $\|\vec{h}\| = 1$ визначимо векторне поле $Y_{\vec{h}} = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k Z_k$ класу $C^1_b(N \times V)$. Тоді для всіх $x \in N_{-\varepsilon} \times V$ і $t \in \mathbb{R}$, для яких визначено $\Phi^{\vec{Z}}_{t\vec{h}} x$ (зокрема при $x \in N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$ і $|t| < r$), визначеним є також $\Phi^{Y_{\vec{h}}}_t x$ і при цьому

$$\Phi^{\vec{Z}}_{t\vec{h}} x = \Phi^{Y_{\vec{h}}}_t x. \tag{2.11}$$

Позначимо через PY вертикальну складову поля Y, тоді $PY_{\vec{h}}(x, \vec{t}) = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k\, PZ_k = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^j_k(x, \vec{t})\vec{e_j}$. Оскільки всі поля Z_k належать до класу C^1_b, сім'я функцій $PY_{\vec{h}} \colon N \times V \ni \langle x, \vec{t}\rangle \mapsto PY_{\vec{h}}(x, \vec{t}) \in \mathbb{R}^m$ рівномірно відносно $\vec{h}$ обмежена.

З умови (2.9) та леми 2.3 (використаної для векторів $PZ_k(x, \vec{0}\,)$) випливає нерівність:

$$\inf\Big\{\|PY_{\vec{h}}(x, \vec{0}\,)\| \mid x \in N_{-\varepsilon};\ \|\vec{h}\| = 1\Big\} = \alpha > 0.$$

З урахуванням леми 2.2 звідси випливає, що зменшивши r, можна домогтися того, що при $\tau \in (0, r)$ оцінка

$$\Big(PY_{\vec{h}}\big(\Phi^{Y_{\vec{h}}}_\tau(x, \vec{0}\,)\big), PY_{\vec{h}}(x, \vec{0}\,)\Big) > \frac{\alpha^2}{2}. \tag{2.12}$$

є справедливою при всіх $\vec{h}$ ($\|\vec{h}\| = 1$), $x \in N_{-\varepsilon}$.

Покажемо тепер, що для $W = B_{\frac{r}{2}}$ відображення Φ є взаємно однозначним на $W \times \big(N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}\big)$. Нехай $x_1, x_2 \in N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$; $\vec{s}_1, \vec{s}_2 \in B_{\frac{r}{2}}$ і

$$\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{s}_1} x_1 = \Phi^{\vec{Z}}_{\vec{s}_2} x_2. \tag{2.13}$$

Доведемо, що в цьому випадку $x_1 = x_2$.

З рівності (2.13) та попарної комутації полів Z_k випливає рівність: $\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{s}} x_1 = x_2$, де $\vec{s} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 \in B_r$. Якщо $\vec{s} = \vec{0}$, то рівність $x_1 = x_2$ очевидна. Для $s \neq \vec{0}$ покладемо $\tau = \|\vec{s}\|$; $\vec{h} = \dfrac{1}{\tau}\vec{s}$; $Y = Y_{\vec{h}}$. Тоді за умовою (2.11): $\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{s}} x_1 = \Phi^{Y}_{\tau} x_1$. Доведемо, що при $\tau \in (0, r)$: $\Phi^{Y}_{\tau} x_1 \notin N \times \{\vec{0}\}$, що і дасть суперечність з умовою (2.13).

Якщо $\big(x(\xi), \vec{t}(\xi)\big)$ — траєкторія поля Y, $\big(x(0), \vec{t}(0)\big) = x_1$, то за нерівністю (2.12) для $\xi \in (0, r)$ отримуємо:

$$\big(\vec{t}(\xi), PY(x_1)\big) = \int\limits_0^{\xi} \Big(PY\big(x(\eta), \vec{t}(\eta)\big), PY(x_1)\Big)\, d\eta > \xi\,\frac{\alpha^2}{2} > 0.$$

Отже, для $\tau \in (0, r)$ маємо $\vec{t}(\tau) \neq \vec{0}$, тобто $x_2 = \Phi^{Y}_{\tau} x_1 \notin N \times \{\vec{0}\}$ — суперечність. Таким чином з рівності (2.13) випливає рівність $\vec{s}_1 = \vec{s}_2$, а тому і $x_1 = x_2$. Окіл нуля $W = B_{\frac{r}{2}}$ задовольняє першу умову теореми.

Крок 2. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і $x = (x_0, \vec{t}_0) \in N_{-\varepsilon} \times B_r$ та розглянемо відображення $F_x\colon V_x \ni \vec{t} \mapsto P(\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x) \in \mathbb{R}^m$ (P — проекція на другий множник). Тут V_x — окіл $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$, для якого $\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in N \times V$.

З рівності (2.8) отримуємо рівність:

$$(F_x)'(\vec{t}) = \big(\alpha^j_k(\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x)\big). \tag{2.14}$$

Тому $F_x \in C^1_b(V_x)$ і існує константа $C > 1$, для якої умова

$$\big\|(F_x)'(\vec{t})\big\| \leqslant C \tag{2.15}$$

виконується для всіх $x \in N_{-\varepsilon} \times B_r$ и $\vec{t} \in V_x$. При цьому $F_x(\vec{0}) = \vec{t}_0$.

Врахувавши умову (2.10) і використавши класичну теорему про диференційовність оберненого відображення, отримуємо, що F_x дифеоморфно відображує деякий окіл U_1 нуля в $\mathbb{R}^m$ на окіл U_2 точки $\vec{t}_0 \in \mathbb{R}^m$.

За умовою теореми, з урахуванням леми 2.2, отримуємо, що існує таке $\gamma > 0$, що

$$\left(x_0 \in N_{-2\varepsilon};\ \|\vec{t_0}\| < \gamma;\ \|\vec{t}\| < \gamma\right) \implies \quad (\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in N_{-\varepsilon} \times V).$$

Знову скористаємося рівномірною неперервністю функції $\det\left(\alpha^j_k(\cdot)\right)$ в $N \times V$. Існує число $p > 0$ (беремо $p < r$), для якого при всіх $(y, \vec{t}) \in N_{-\varepsilon} \times B_p$ виконується нерівність: $\left|\det\left(\alpha^j_k(y, \vec{t})\right)\right| > \dfrac{\delta}{2}$.

Якщо тепер взяти точку $x = (x_0, \vec{t_0}) \in N_{-2\varepsilon} \times B_q$, де $q = \min(\gamma, \frac{p}{2C})$, то при $\|\vec{t}\| < q$ значення $\Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x$ належить до $N_{-\varepsilon} \times B_p$, а тому (див. (2.14)):

$$\left|\det F'_x(\vec{t})\right| > \frac{\delta}{2}. \tag{2.16}$$

Таким чином, для кожного $x \in N_{-2\varepsilon} \times B_q$ відповідна функція F_x задовольняє всі умови леми 2.5. Тому існує така константа $\chi > 0$, для якої дифеоморфізм $F_x \colon U_1 \to U_2$ для всіх $x \in N_{-2\varepsilon} \times B_q$ має властивість $U_2 \supset \left\{\vec{t} \mid \|\vec{t} - \vec{t_0}\| \leqslant \chi\right\}$, $U_1 \subset B_{\frac{r}{2}}$.

Якщо тепер покласти $\xi = \min(q, \chi)$, то приходимо до висновку: $\vec{0} \in U_2$ для будь-якого $x \in N_{-2\varepsilon} \times B_\xi$, а тому існує $\vec{t} \in B_{\frac{r}{2}}$, при якому $y = \Phi^{\vec{Z}}_{\vec{t}} x \in N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}$, а тому $x = \Phi^{\vec{Z}}_{-\vec{t}} y \in \Phi^{\vec{Z}}_{B_{\frac{r}{2}}}\left(N_{-\varepsilon} \times \{\vec{0}\}\right)$. Таким чином твердження б) теореми виконується, якщо покласти $W_1 = B_\xi$. Теорему доведено. ■

Зауваження 2.4. *Враховуючи лінійну залежність радіусів околів у U_1 та U_2 у лемі 2.5, можемо зменшити окіл W до як завгодно малої кулі B_η, і при цьому справедливим залишиться включення $g(N_{-2\varepsilon} \times B_{\frac{\eta}{a}}) \subset \Phi^{\vec{Z}}_{B_\eta} S_{-\varepsilon}$ при деякому a, що залежить від ε.*

Зауваження 2.5. *Теорема 2.1 залишається вірною і у випадку коли векторні поля з набору $\vec{Z}$ для кожного $\varepsilon > 0$ є визначеними лише на деякому околі вигляду $g\left(N_{-\varepsilon+\xi(\varepsilon)} \times B_{r(\varepsilon)}\right)$, і при цьому існують такі $r_0(\varepsilon) > 0$ та $r_1(\varepsilon) > 0$, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}$ є визначеним на $(S_{-\varepsilon})_{r_1(\varepsilon)} \times B_{r_0(\varepsilon)}$ і набуває значень в*

$g\left(N_{-\varepsilon+\xi(\varepsilon)} \times B_{r(\varepsilon)}\right)$.

Отримані в теоремі околи W і W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$ залежать від $\varepsilon > 0$. Якщо поверхня S замкнена, а многовид M наділений рівномірною структурою, то при достатньо малих $\varepsilon > 0$ має місце рівність: $S = S_{-\varepsilon}$. Тому для замкненої поверхні S з доведеної теореми випливає існування околів W і W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для яких визначено $\Phi_W^{\vec{Z}} S \supset g(N \times W_1)$.

2.4 Поверхневі міри першого типу

Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m, і $g\colon N \times V \to U \subset M$ — відповідний обмежений ізоморфізм. $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(U)$, що попарно комутують. Нехай μ — скінченна борелівська міра (знакозмінна), визначена на M. Задача полягає в побудові міри на S, індукованої мірою μ та набором полів $\vec{X}$. Оскільки $S_{-\frac{1}{n}} \nearrow S$, то достатньо побудувати узгоджені між собою міри на $S_{-\varepsilon}$ при достатньо малих додатних ε $\big(\varepsilon \in (0, \alpha)\big)$.

Лема 2.6. *Нехай $\varepsilon > 0$ і відображення $\Phi\colon S_{-\varepsilon} \times W \to \Phi_W^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset U$ побудовано згідно з теоремою 2.1 (див.* (2.7)*). Тоді існує таке $p > 0$, що $\overline{B}_{2p} \subset W$ і відображення $\Psi = \Phi\big|_{S_{-\varepsilon}\times\overline{B}_p} : S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p \to \Phi_{\overline{B}_p}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon}$ — гомеоморфізм $S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p$ на замкнену підмножину многовиду M $\Big($тут і далі $\overline{B}_p = \big\{\vec{t} \mid \|\vec{t}\| \leqslant p\big\} \subset \mathbb{R}^m\Big)$.*

Доведення. Беремо $\widetilde{p}$ таке, що $\overline{B}_{2\widetilde{p}} \subset W$. За теоремою 2.1 відображення Ψ взаємно однозначне на $S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_{\widetilde{p}}$. Неперервність відображення Ψ випливає з теореми про неперервну залежності розв'язку системи диференціальних рівнянь від початкових умов.

Нехай тепер $y_n = \Phi_{\vec{t_n}}^{\vec{X}} x_n \to y_0 = \Phi_{\vec{t_0}}^{\vec{X}} x_0$ ($x_n, x_0 \in S_{-\varepsilon}$, $\vec{t_n}, \vec{t_0} \in \overline{B}_{\widetilde{p}}$). Тоді послідовність $\vec{t_n}$ збігається до $\vec{t_0}$. Дійсно, в іншому випадку існувала б підпослідовність $\vec{t}_{n_k} \to \vec{s} \neq \vec{t_0}$, $s \in \overline{B}_{\widetilde{p}}$,звідки випливає:

$$x_{n_k} = \Phi_{-\vec{t}_{n_k}}^{\vec{X}} y_{n_k} \to \Phi_{-\vec{s}}^{\vec{X}} y_0 = \Phi_{\vec{t_0}-\vec{s}}^{\vec{X}} x_0 \in S_{-\varepsilon}$$

(завдяки замкненості $S_{-\varepsilon}$), що суперечить взаємній однозначності відображення Φ. Отже, $t_n \to t_0$, $x_n = \Phi^{\vec{X}}_{-\vec{t_n}} y_n \to \Phi^{\vec{X}}_{-\vec{t_0}} y_0 = x_0$. Тим самим доведено неперервність відображення Ψ^{-1}.

Нехай $\widetilde{W}$ та $\widetilde{W}_1$ — околи нуля в $\mathbb{R}^m$, існування яких обґрунтовано в теоремі 2.1 $\left(\text{для } \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$, причому, не втрачаючи загальності, можемо вважати $\widetilde{W}_1$ замкненою кулею $\overline{B}_d$ з центром в $\vec{0}$, а $\widetilde{W}$ замкненою кулею $\overline{B}_{ad}$ (див. зауваження 2.4). Крім того, за доведеним вище $\Phi\colon S_{-\frac{\varepsilon}{4}} \times \overline{B}_{\frac{ad}{2}} \to \Phi^{\vec{X}}_{\overline{B}_{\frac{ad}{2}}} S_{-\frac{\varepsilon}{4}}$ є гомеоморфізмом.

Помітимо, що $\rho(S \backslash S_{-\frac{\varepsilon}{2}}, S_{-\varepsilon}) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, а тому завдяки ліпшицевості морфізмів g та g^{-1} існує $\beta = \beta(\varepsilon) > 0$, для якого виконується нерівність:

$$\rho\Big(S_{-\varepsilon}, g\big((N \backslash N_{-\frac{\varepsilon}{2}}) \times V\big)\Big) \geqslant \beta \tag{2.17}$$

($\beta = \dfrac{\varepsilon}{2L_1L_2}$, где L_1, L_2 — константи Ліпшиця для відображень g та g^{-1} відповідно).

За лемою 2.2 існує $\gamma > 0$ таке, що для $\|\vec{t}\| < \gamma$, $x \in S_{-\varepsilon}$: $\Phi^{\vec{X}}_{\vec{t}} x \in U$, $\rho\big(x, \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t}} x\big) < \beta$. Тому з урахуванням умови (2.17), зменшивши γ, можна забезпечити виконання умови $\big(\|\vec{t}\| \leqslant \gamma;\ x \in S_{-\varepsilon}\big) \Longrightarrow \big(\Phi^{\vec{X}}_{\vec{t}} x \in g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times \overline{B}_{\frac{d}{2}}\big)$.

Доведемо тепер замкненість образу Ψ при $p = \{\min \widetilde{p}, \gamma\}$. Нехай $y_n = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_n}} x_n \to y_0 \in M$ ($\vec{t_n} \in \overline{B}_p$; $x_n \in S_{-\varepsilon}$), потрібно перевірити, що $y_0 = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t_0}} x_0$, де $x_0 \in S_{-\varepsilon}$; $\vec{t_0} \in \overline{B}_p$. Оскільки $y_n \in g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times \overline{B}_{\frac{d}{2}})$ і множина $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times \overline{B}_{\frac{d}{2}}) \subset \Phi^{\vec{X}}_{\overline{B}_{\frac{ad}{2}}} S_{-\frac{\varepsilon}{4}}$ є замкненою, маємо $y \in g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times \overline{B}_{\frac{d}{2}}) \subset \Phi^{\vec{X}}_{\overline{B}_{\frac{ad}{2}}} S_{-\frac{\varepsilon}{4}}$. Тому існує представлення $y = \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t}} x$, де $\|\vec{t}\| \leqslant \dfrac{ad}{2}$; $x \in S_{-\frac{\varepsilon}{4}}$. З урахуванням гомеоморфності відображення Φ на $S_{-\frac{\varepsilon}{4}} \times \overline{B}_{\frac{ad}{2}}$ і замкненості $S_{-\varepsilon}$, отримуємо:

$$S_{-\varepsilon} \ni x_n \to x \in S_{-\varepsilon}, \qquad \overline{B}_p \ni t_n \to t \in \overline{B}_p$$

Отже, $y \in \Phi^{\vec{X}}_{\overline{B}_p} S_{-\varepsilon}$ і лему доведено. ∎

Наслідком є висновок:

$$\big(A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon});\ B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)\big) \Longrightarrow \big(\Phi_B^{\vec{X}} A \in \mathcal{B}(U) \subset \mathcal{B}(M)\big).$$

Якщо μ — скінченна борелівська міра на M, то для кожної борелівської множини $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ можна розглянути міру w_A на $\mathcal{B}(\overline{B}_p)$, визначену формулою:

$$w_A(B) = w_A^{\vec{X}}(B) = \mu(\Phi_B^{\vec{X}} A),$$

а для кожної множини $B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)$ розглянути міру ν_B на $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, визначену рівністю:

$$\nu_B(A) = w_A(B) = \mu(\Phi_B^{\vec{X}} A).$$

Нехай λ_m — інваріантна міра Лебега на $\mathbb{R}^m$; $B_r = \Big\{\vec{t} \mid \|\vec{t}\| < r\Big\} \subset \mathbb{R}^m\Big)$, і існує границя:

$$\frac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0}) := \lim_{r\to 0} \frac{w_A(B_r)}{\lambda_m(B_r)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \nu_{B_r}(A). \tag{2.18}$$

Якщо вказана границя існує для кожного $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, то на підставі теореми Нікодима ([8, т.1, с. 320]) робимо висновок про те, що функція множин $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon}) \ni A \mapsto \dfrac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0})$ є скінченною борелівською мірою на $S_{-\varepsilon}$.

Введемо позначення: $\sigma_{\vec{X}}(A) := \dfrac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0})$. Значення $\sigma_{\vec{X}}(A)$ не залежить від $\varepsilon > 0$, а оскільки кожне $A \in \mathcal{B}(S)$ можна представити у вигляді диз'юнктного об'єднання: $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$, де $A^{(n)} \in S_{-\varepsilon_n}$ при деякому $\varepsilon_n > 0$, то міра $\sigma_{\vec{X}}$ коректно продовжується на $\mathcal{B}(S)$.

Означення 2.4. *Міру $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{X}}[\mu]$ назвемо поверхневою мірою першого типу на S (що породжена набором полів $\vec{X}$).*

Помітимо, що якщо вихідна міра μ є невід'ємною, то $\sigma_{\vec{X}}$ також невід'ємна. У випадку замкненої поверхні S на многовиді з рівномірною структурою при достатньо малому $\varepsilon > 0$ має місце рівність: $S = S_{-\varepsilon}$, звідки випливає скінченність міри $\sigma_{\vec{X}}$ на S. У загальному випадку скінченність не гарантується, однак як наслідок теореми 2.2 (зауваження 2.6) отримано достатні умови скінченності поверхневої міри.

Приведемо умову, за якої для достатньо малих $\varepsilon > 0$ для всіх $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ існує границя, визначена формулою (2.18).

Нехай Φ_t^X — потік векторного поля X класу $C_b^1(M)$. Диференційовність скінченної борелівської міри μ уздовж векторного поля X (в сильному сенсі) передбачає існування для кожної борелівської множини $A \in \mathcal{B}(M)$ границі $\nu(A) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mu(\Phi_t A) - \mu(A)\big)$, звідки випливає, що $\nu = d_X\mu$ є (скінченною) борелівською мірою, абсолютно неперервною відносно міри μ. При цьому відповідна щільність $\frac{d\nu}{d\mu}$ називається логарифмічною похідною міри μ відносно поля X або дивергенцією поля X (відносно міри μ) (диференційовність мір більш детально розглянуто у розділі 3).

Перш, ніж доводити теорему, що визначає достатні умови існування поверхневої міри, доведемо допоміжну лему.

Лема 2.7. *Нехай U — відкрита підмножина в M, $Z_1, \ldots, Z_m$ — повні векторні поля класу $C_b^1(U)$, що попарно комутують; μ — борелівська міра на M, і для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \ldots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \ldots d_{Z_{k_m}}\mu$ (в U). Тоді для будь-якої підстановки σ степеня m визначено міру $\nu_\sigma = d_{Z_{\sigma(1)}} d_{Z_{\sigma(2)}} \ldots d_{Z_{\sigma(m)}}\mu$, що не залежить від підстановки σ.*

Доведення.

Крок 1. Розглянемо спершу випадок $m = 2$ і для двох векторних полів X і Y, що попарно комутують, покажемо, що з існування $d_X\mu$, $d_Y\mu$ та $d_Y d_X\mu$ випливає існування $d_X d_Y\mu$ і рівність $d_X d_Y\mu = d_Y d_X\mu$.

Зафіксуємо борелівську множину $A \subset U$ і розглянемо функцію $f(t, s) = = \mu(\Phi_t^X \Phi_s^Y A)$. Неперервність міри μ вздовж векторних полів X і Y призводить до неперервності функції f за кожною змінною. При цьому неперервність μ уздовж поля Y означає, що $\|\mu \circ \Phi_s^Y - \mu\| \to 0$, $s \to 0$ (тут $\|\nu\|$ — варіація міри ν). Тому $\sup\limits_t \big|\mu(\Phi_s^Y \Phi_t^X A) - \mu(\Phi_t^X A)\big| \to 0$, $s \to 0$, і функція f неперервна за змінною s рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$. Аналогічно і навпаки — f неперервна за t рівномірно відносно $s \in \mathbb{R}$, а тому і за сукупністю аргументів.

Оскільки міри $d_X\mu$, $d_Y\mu$ і $d_Y d_X\mu$ абсолютно неперервні відносно міри μ, то вони також неперервні уздовж векторних полів X і Y (випадок диференціювання мір уздовж сталих напрямків розглянуто в [5], у випадку векторних полів міркування аналогічні, див. підрозділ 4.1.2). Тому ті ж міркування встановлюють неперервність за сукупністю аргументів функцій $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,s) = d_X\mu(\Phi_t^X \Phi_s^Y A)$; $\dfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) = d_Y\mu(\Phi_t^X \Phi_s^Y A)$ і $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t,s) = d_Y d_X\mu(\Phi_t^X \Phi_s^Y A)$.

Маємо тотожність (для всіх $s, t, \Delta s, \Delta t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t, s+\Delta s) &= f(t+\Delta t, s) + f(t, s+\Delta s) - f(t,s) + f(t+\Delta t, s+\Delta s) - \\ &\quad - f(t, s+\Delta s) - f(t+\Delta t, s) + f(t,s) = \\ &= f(t+\Delta t, s) + \int\limits_0^{\Delta s} \frac{\partial f}{\partial s}(t, s+\beta)\,d\beta + \int\limits_0^{\Delta t} d\alpha \int\limits_0^{\Delta s} \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t+\alpha, s+\beta)\,d\beta, \end{aligned}$$

Можемо тепер використати теорему Фубіні ([8, т.1, с. 219]) і змінити порядок інтегрування в останньому доданку. Продиференціювавши в точці $\Delta s = 0$, отримуємо рівність

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t+\Delta t, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) + \int\limits_0^{\Delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t+\alpha, s)\,d\alpha,$$

звідки випливає існування $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial s}$ та рівність: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial s}(t,s) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}(t,s)$, що і доводить бажану рівність.

Крок 2. Розглянемо тепер загальний випадок довільного m і доведемо твердження леми за за індукцією. Базу індукції для $m = 2$ доведено у кроці 1, доведемо тепер перехід індукції. Нехай твердження є вірним для будь-якого набору векторних полів розміру менше за m, і нехай задано набір

$\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$, що задовольняє умови леми, і підстановку σ степеня m.

Якщо $\sigma(1) = m$, необхідна умова випливає з кроку 1, застосованого для міри $\nu = d_{Z_2} \ldots d_{Z_{m-1}}\mu$ (в якій за припущенням індукції можна змінювати порядок векторних полів) та векторних полів Z_1 і Z_m.

Якщо $\sigma(1) \neq m$, тоді за припущенням індукції коректно визначеною є міра $\nu = d_{Z_{\sigma(1)+1}} d_{Z_{\sigma(1)+2}} \ldots d_{Z_m}\mu$, і при цьому в ній можна змінювати порядок векторних полів. Можемо тепер використати припущення індукції для міри ν і будь-якої підстановки розміру $\sigma(1) < m$. Отже, визначено міру $d_{Z_{\sigma(1)}} d_{Z_1} \ldots d_{Z_{\sigma(1)-1}}\nu = d_{Z_{\sigma(1)}} d_{Z_1} \ldots d_{Z_{\sigma(1)-1}} d_{Z_{\sigma(1)+1}} \ldots d_{Z_m}\mu$.

Розглянемо тепер підстановку τ степеня $m-1$, що визначається умовою:

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(i+1), & 1 \leqslant \sigma(i+1) < \sigma(1), \\ \sigma(i+1) - 1, & \sigma(1) < \sigma(i+1) \leqslant m. \end{cases}$$

Тоді за припущенням індукції, використаним для набору векторних полів $\{Z_1, \ldots, Z_{\sigma(1)-1} Z_{\sigma(1)+1} \ldots Z_m\}$ і підстановки τ, отримуємо існування міри $d_{Z_{\sigma(2)}} \ldots d_{Z_{\sigma(m)}}\mu$ і її співпадіння з мірою $d_{Z_1} \ldots d_{Z_{\sigma(1)-1}} d_{Z_{\sigma(1)+1}} \ldots d_{Z_m}\mu$, що і завершує доведення леми. ■

Теорема 2.2. *Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m, і $g\colon N \times V \to U \subset M$ — відповідний обмежений ізоморфізм; $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на U або на більшій відкритій підмножині $\widetilde{U} \subset M$ повних векторних полів класу C_b^1, що попарно комутують. Крім того, покладемо відображення $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^m \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$ взаємно однозначним. Нехай μ — скінченна борелівська міра на M, і для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \ldots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \ldots d_{Z_{k_s}}\mu$ (на області визначення векторних полів з набору $\vec{Z}$). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ існує границя, визначена формулою* (2.18).

Доведення. Беремо $\varepsilon > 0$ і кулю $\overline{B}_p$, існування якої гарантовано лемою 2.6.

Нехай $C = \bigtimes_{k=1}^{m}(-\infty, 0]$. Для $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ покладемо $\widehat{A} = \Phi_C^{\vec{Z}} A \subset \widetilde{U}$. Для множини $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ визначимо на $\overline{B}_p$ функцію $f(\vec{t}) = f_A(\vec{t})$ формулою: $f(\vec{t}) := \mu(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \widehat{A})$. Для $\vec{t} \in \overline{B}_p$ і для будь-якої підстановки σ степеня m має місце рівність

$$\frac{\partial^m f}{\partial t_{\sigma(1)} \partial t_{\sigma(2)} \dots \partial t_{\sigma(m)}}(\vec{t}) = (d_{Z_{\sigma(1)}} d_{Z_{\sigma(2)}} \dots d_{Z_{\sigma(m)}} \mu)(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \widehat{A}).$$

За лемою 2.7 вказані похідні існують та неперервні за сукупністю аргументів.

Для будь-якої борелівскої множини $B \in \mathcal{B}(\overline{B}_p)$ виконується рівність: $w_A(B) = \int_B \frac{\partial^m f}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_m}\, d\vec{t}$. Дійсно, з твердження 4.1, доведеного для одновимірного випадку, необхідна рівність одержується для прямокутників, а отже, і для всіх борелівських множин. Тому з неперервності функції $\frac{\partial^m f}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_m}$ і випливає твердження теореми, і крім того рівність:

$$\frac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0}) = \frac{\partial^m f}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_m}(\vec{0}).$$

Теорему доведено. ∎

Означення 2.5. *Трійку $(S, \vec{Z}, \mu)$ будемо називати узгодженою, якщо:*

- S — вкладена в $U \subset M$ поверхня корозмірності m;

- $\vec{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(\widetilde{U})$, де $U \subset \widetilde{U} \subset M$. При цьому поля з набору $\vec{Z}$ є повними та попарно комутують, і крім того відображення потоку $\Phi\colon S \times \mathbb{R}^m \to \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$ взаємно однозначне;

- μ — скінченна борелівська міра на M (або хоча б на $\widetilde{U}$), для якої для кожного монотонно зростаючого набору натуральних чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_s \leqslant m$ $\big(s \in \{1, 2, \dots, m\}\big)$ існує $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \dots d_{Z_{k_s}} \mu$ на $\mathcal{B}(\widetilde{U})$.

Інакше кажучи, трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ є узгодженою, якщо вона задовольняє умови теореми 2.2, а отже, для неї визначена поверхнева міра $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$.

Зауваження 2.6. *В процесі доведення теореми 2.2 було доведено, що у* *випадку узгодженої трійки* $\{S, \vec{X}, \mu\}$ *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *і множини* $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ *(а тому і для множини* $A \in \mathcal{B}(S)$*) виконується рівність:*

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1} d_{X_2} \ldots d_{X_m}\mu)(\widehat{A}), \qquad \text{де } \widehat{A} = \Phi_C^{\vec{X}} A; \;\; C = \bigtimes_{k=1}^{m} (-\infty, 0].$$

Звідси випливає обмеженість варіації міри $\sigma_{\vec{X}}$ *на* $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$.

Зауваження 2.7. *Помітимо, що векторні поля* Z_k*, розглянуті в прикладі 2.2, задовольняють вимоги, накладені на систему полів в теоремі 2.2.*

Помітимо також, що в означенні узгодженої трійки $(S, \vec{Z}, \mu)$ окіл U поверхні S може бути замінений як завгодно малим околом S вигляду $g(N \times V_1)$, де $V_1 \subset V$ — окіл $\vec{0}$ в $\mathbb{R}^m$.

Означення 2.6. *Трійку* $(S, \vec{Z}, \mu)$*, в якій строго трансверсальний до* S *набір векторних полів, що попарно комутують, визначено при кожному* $\varepsilon > 0$ *лише на деякому околі поверхні* $S_{-\varepsilon}$ *вигляду* $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$ *(вимога повноти полів відсутня), але існують такі* $r_0(\varepsilon) > 0$ *та* $r_1(\varepsilon) > 0$*, що відображення* $\Phi^{\vec{Z}}$ *є визначеним на* $(S_{-\varepsilon})_{r_1(\varepsilon)} \times B_{r_0(\varepsilon)}$ *і при цьому для кожної множини* $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ *визначено границю* (2.18)*, а тому і відповідну міру* $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$*, назвемо* *узгодженою в широкому сенсі.*

2.5 Властивості поверхневих мір першого типу

Далі в роботі передбачається, що міра μ є невід'ємною.

Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення S; $\vec{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — строго трансверсальний до S набір повних векторних полів класу C_b^1 (визначених на множині $\widetilde{U} \supset U$), що попарно комутують; трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена.

Нехай f — обмежена борелівська функція на S і $\varepsilon > 0$. Покладемо $\widehat{f}$ — продовження f першим інтегралом кожного векторного поля Z_k. Помітимо, що існування такого продовження при кожному $\varepsilon > 0$ на деякий окіл $S_{-\varepsilon}$

вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$ випливає з теореми 2.1 $\big($тобто $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1) \subset \Phi^{\vec{Z}}_{\mathbb{R}^m} S_{-\frac{\varepsilon}{4}}\big)$.

Тоді функція $\widehat{f}$ належить до класу C^1_b.

Лема 2.8. *Нехай трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджена (достатньо узгодженості в широкому сенсі); функція f належить до класу C^1_b; $\widehat{f}\big|_S = f$ і для кожного $\varepsilon > 0$ функція $\widehat{f}$ є першим інтегралом векторних полів Z_k системи $\vec{Z}$ в деякому околі $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$; $\inf\limits_S f > 0$. Тоді трійка $(S, \widehat{f}\vec{Z}, \mu)$ узгоджена в широкому сенсі і виконується рівність*

$$\sigma_{\hat{f}\vec{Z}}[\mu] = f^m \cdot \sigma_{\vec{Z}}[\mu]. \qquad (2.19)$$

Доведення. Зрозуміло, що набір $\widehat{f}\vec{Z}$ є строго трансверсальним до S набором векторних полів, що попарно комутують. Покажемо, що визначено відповідну поверхневу міру $\sigma_{\hat{f}\vec{Z}}[\mu]$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Для будь-якої обмеженої функції h, визначеної на $S_{-\varepsilon}$; $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$; $B \in \mathcal{B}(W)$, де W — достатньо малий окіл $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$, коректно визначається наступна підмножина:

$$\Phi^{\hat{h}\vec{Z}}_B A := \{\Phi^{\vec{Z}}_{h(x)\vec{t}} x \mid x \in A; \vec{t} \in B\} \subset g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1).$$

Якщо h — кусково стала борелівська функція на $S_{-\varepsilon}$, то множина $\Phi^{\hat{h}\vec{Z}}_B A$ є борелівською. Дійсно, нехай $h = \sum\limits_{k=0}^{p} c_k j_{A_k}$, де $A_k \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$; $S_{-\varepsilon} = \bigvee\limits_{k=0}^{p} A_k$; $c_0 = 0$. Тоді $\Phi^{\hat{h}\vec{Z}}_B A = \bigvee\limits_{k=0}^{p} \Phi^{\vec{Z}}_{c_k B}(A \cap A_k) \in \mathcal{B}(M)$.

З узгодженості трійки $(S, \vec{Z}, \mu)$ випливає, що $\mu(S_{-\varepsilon}) = 0$. Тому

$$\mu(\Phi^{\hat{h}\vec{Z}}_B A) = \sum_{k=0}^{p} \mu\big(\Phi^{\vec{Z}}_{c_k B}(A \cap A_k)\big) = \sum_{k=1}^{p} w_{A \cap A_k}(c_k B),$$

$$\sigma_{\widehat{h}\vec{Z}}(A) := \frac{dw_A^{\widehat{h}\vec{Z}}}{d\lambda_m}(\vec{0}) := \sum_{k=1}^{p} \lim_{r\to 0} \frac{w_{A\cap A_k}(c_k B_r)}{\lambda_m(B_r)} = \sum_{k=1}^{p} c_k^m \lim_{r\to 0} \frac{w_{A\cap A_k}(c_k B_r)}{\lambda_m(c_k B_r)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} c_k^m \sigma_{\vec{Z}}(A\cap A_k) = \int\limits_A h^m \, d\sigma_{\vec{Z}}.$$

Нехай тепер h_j и g_j — дві послідовності простих борелівських функцій на $S_{-\varepsilon}$, для яких при кожному j виконуються нерівності: $0 \leqslant h_j \leqslant f \leqslant g_j$; і при цьому h_j та g_j рівномірно на $S_{-\varepsilon}$ збігаються до $f\big|_{S_{-\varepsilon}}$. Функції h_j і g_j рівномірно обмежені, а тому окіл W нуля в $\mathbb{R}^m$ можна вибрати єдиним для всіх функцій h_j і g_j.

Для $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ і $B_r \in \mathcal{B}(W)$ мають місце вкладення:

$$\Phi_{B_r}^{\widehat{h}_j\vec{Z}}(A) \subset \Phi_{B_r}^{\widehat{f}\vec{Z}}(A) \subset \Phi_{B_r}^{\widehat{g}_j\vec{Z}}(A).$$

Зафіксуємо $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ і $\delta > 0$. Існує $j \in \mathbb{N}$, для якого виконується нерівність

$$\int\limits_A (g_j^m - h_j^m)\, d\sigma_{\vec{Z}} < \delta \tag{2.20}$$

і $r_0 > 0$ таке, що при $r \in (0, r_0)$ мають місце нерівності:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu(\Phi_{B_r}^{\widehat{h}_j\vec{Z}} A) - \int\limits_A h_j^m \, d\sigma_{\vec{Z}} \right| < \delta; \\ &\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu(\Phi_{B_r}^{\widehat{g}_j\vec{Z}} A) - \int\limits_A g_j^m \, d\sigma_{\vec{Z}} \right| < \delta. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Завдяки невід'ємності міри μ з нерівностей

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu(\Phi_{B_r}^{\widehat{h}_j\vec{Z}} A) \leqslant \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu(\Phi_{B_r}^{\widehat{f}\vec{Z}} A) \leqslant \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\, \mu(\Phi_{B_r}^{\widehat{g}_j\vec{Z}} A),$$

а також (2.20), (2.21), випливає, що при $r \in (0, r_0)$ виконується нерівність

$$\left| \int\limits_A f^m \, d\sigma_{\vec{Z}} - \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \, \mu(\Phi_{B_r}^{\hat{f}\vec{Z}} A) \right| < 2\,\delta,$$

яка, з урахуванням довільності $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ і $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, доводить лему. ■

Наступна теорема показує незалежність поверхневої міри від набору векторних полів, достатньо лише того, щоб векторні поля збігалися на поверхні S.

Доведемо спершу допоміжну лему.

Лема 2.9. *Нехай на M задано рівномірний атлас Ω. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\alpha > 0$, що для кожної точки $x \in S_{-\varepsilon}$ існує карта $(\widetilde{U}, \varphi) \in \Omega$, для якої $\varphi(\widetilde{U})$ містить кулю $W = B_\alpha\big(\varphi(x)\big)$ і $\varphi^{-1}(W) \subset g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$.*

Доведення. Перш за все помітимо, що якщо карта $(\widetilde{U}, \varphi)$ є такою, що $\varphi(\widetilde{U})$ містить кулю з центром в точці $\varphi(x)$, $y \in M$, $\varphi(y)$ лежить у вказаній кулі і C — стала з означення обмеженого атласу, то виконуються нерівності:

$$\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\| \leqslant \rho(x, y) \leqslant C\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\|. \tag{2.22}$$

Дійсно, якщо крива Γ на M є прообразом відрізку $\big[\varphi(x), \varphi(y)\big] \subset E$ та розбита на ділянки точками x_j: $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$, то довжина кривої $\big($а тому і $\rho(x,y)\big)$ не перебільшує $\sum\limits_{j=1}^{k} C\big\|\varphi(x_{j-1}) - \varphi(x_j)\big\| = C\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\|$.

З іншого боку довжина образі в карті φ будь-якої кривої Γ, яка з'єднує точки $x, y \in M$ (або її частини з області визначення карти φ) не менша за $\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\|$. Звідси випливає нерівність: $\big\|\varphi(x) - \varphi(y)\big\| \leqslant \rho(x, y)$.

Візьмемо $\beta > 0$ з нерівності (2.17) та δ з нерівності (2.2) для кулі W_1. Якщо тепер $r > 0$ взято з означення рівномірного атласу, то, як випливає з нерівностей (2.22) та (2.17), в якості α можна взяти довільне додатне число менше за $\min\Big(r, \frac{\beta}{C}, \frac{\delta}{C}\Big)$. Лему доведено. ■

Теорема 2.3. *Нехай на M задано рівномірний атлас Ω; ω — асоційована m-форма поверхні S, вкладеної в M; трійки $(S, \vec{Y}, \mu)$ і $(S, \vec{Z}, \mu)$ узгоджені. Нехай $\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S = \left|\omega(\vec{Y})\right| \Big|_S$. Тоді $\sigma_{\vec{Y}} = \sigma_{\vec{Z}}$.*

Доведення. Для кожної точки $x \in S$ і для будь-якого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ має місце розклад:

$$Z_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j(x) Y_j(x) + R_k(x), \qquad \text{де } R_k(x) \in T_x S. \tag{2.23}$$

Крок 1. Розглянемо допоміжний набір векторних полів

$$X_k = \sum_{j=1}^{m} \widehat{\alpha_k^j} Y_j \tag{2.24}$$

($\widehat{\alpha_k^j}$ сталі уздовж траєкторій векторних полів набору $\vec{Y}$ і співпадають з α_k^j на S).

За теоремою 2.1 функції $\widehat{\alpha_k^j}$, а тому і поля X_k, для кожного $\varepsilon > 0$ коректно визначені в деякому околі $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$. При цьому на S виконується рівність: $\left|\omega(\vec{Y})(x)\right| = \left|\omega(\vec{Z})(x)\right| = \left|\omega(\vec{X})(x)\right|$.

Функції α_k^j належать до классу $C_b^1(S)$. Для перевірки цього факту розглянемо обмежений ізоморфізм $g \colon N \times V \to U \subset M$, що визначає вкладену поверхню S, і перейдемо від полів Z_k і Y_k до g-зв'язаних з ними полів $\widetilde{Z_k}$ і $\widetilde{Y_k}$ на $N \times V$. Ці поля — класу $C_b^1(N \times V)$; в кожній точці $(p, \vec{v}) \in N \times V$ має місце канонічний ізоморфізм $T_{(p,\vec{v})} \cong T_p N \dotplus \mathbb{R}^m$, що визначає розклад дотичного в точці $(p, \vec{v})$ вектора до многовиду $N \times V$ на дві складові — “горизонтальну” і “вертикальну”.

Вертикальні (скінченновимірні) і горизонтальні складові векторних полів $\widetilde{Z_k}$ і $\widetilde{Y_k}$ наслідують гладкість класу $C_b^1(N \times V)$. З розкладу

$$\widetilde{Z_k}(y) = \sum_{j=1}^{m} \beta_k^j \widetilde{Y_j}(y) + \widetilde{R_k}(y) \qquad (y \in N \times \{\vec{0}\}),$$

в якому вектор $\widetilde{R_k}(y)$ горизонтальний, однозначно знаходяться функції β_k^j, що наслідують гладкість: $\beta_k^j \in C_b^1\big(N \times \{\vec{0}\}\big)$. Оскільки $\alpha_k^j(x) = \beta_k^j\big(g^{-1}(x)\big)$, то $\alpha_k^j \in C_b^1(S)$.

З теореми про гладку залежність розв'язків систем диференціальних рівнянь від початкових умов випливає належність функції $\widehat{\alpha_k^j}$ до класу C_b^1 $\big($у всякому випадку для кожного $\varepsilon > 0$ на $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)\big)$.

Тому векторні поля X_k наслідують гладкість C_b^1, а оскільки функції $\widehat{\alpha_k^j}$ сталі на траєкторіях полів Y_k (а тому на інтегральних многовидах системи полів $\vec{Y}$), то поля X_k також попарно комутують.

Крок 2. Доведемо існування міри $\sigma_{\vec{X}}$ на S і рівність $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}$.

Для $x \in S_{-\varepsilon}$, $B \in \mathcal{B}(W_{x,\alpha})$ (тут $W_{x,\alpha}$ — малий окіл $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$, залежний від функції α) має місце рівність: $\Phi_B^{\vec{X}} x = \Phi_{\alpha_x(B)}^{\vec{Y}} x$, де $\alpha(x) = \alpha_x \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — лінійне перетворення з матрицею $\big(\alpha_k^j(x)\big)$. З вихідної умови для всіх $x \in S_{-\varepsilon}$ маємо рівність $|\det \alpha_x| = 1$.

Нехай h_k^j — прості борелівські функції на $S_{-\varepsilon}$. Тоді $S_{-\varepsilon} = \bigvee_{k=1}^{p} A_k$ і на кожному A_k матричнозначна функція h_x передбачається незалежною від x. Покладемо

$$X_{h,k} := \sum_{j=1}^{p} \widehat{h_k^j} Y_j, \quad \vec{X}_h := \{X_{h,1}, \dots, X_{h,m}\}$$

(векторні поля $X_{h,k}$ розривні, проте $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}_h}$ має зміст). Тоді для кожного $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, $B \in \mathcal{B}(W_{x,h})$ отримаємо:

$$w_A^{\vec{X}_h}(B) = \mu(\Phi_B^{\vec{X}_h} A) = \sum_{k=1}^{p} \mu\big(\Phi_{h_x(B)}^{\vec{Y}}(A \cap A_k)\big) = \sum_{k=1}^{p} w_{A \cap A_k}^{\vec{Y}}\big(h_x(B)\big);$$

$$\sigma_{\vec{X}_h}(A) := \frac{dw_A^{\vec{X}_h}}{d\lambda_m}(\vec{0}) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_{\vec{Y}}(A \cap A_k) \cdot |\det h_x|.$$

При цьому

$$\min_A |\det h_x| \cdot \sigma_{\vec{Y}}(A) \leqslant \sigma_{\vec{X}_h}(A) \leqslant \max_A |\det h_x| \cdot \sigma_{\vec{Y}}(A). \tag{2.25}$$

Для кожної функції α_k^j побудуємо дві послідовності простих борелівських функцій $(h_n)_k^j$ та $(g_n)_k^j$ на $S_{-\varepsilon}$ таким чином, що при всіх k, j обидві послідовності рівномірно збігаються до функції α_k^j на $S_{-\varepsilon}$, і при цьому для кожного $x \in S_{-\varepsilon}$ мають місце вкладення (при r, меншому за деяку сталу):

$$h_n(x)(B_r) \subset \alpha(x)(B_r) \subset g_n(x)(B_r). \tag{2.26}$$

Обґрунтуємо існування вказаних послідовностей. Оскільки функції $\alpha_k^j \in C_b^1(S)$, то $\alpha(S_{-\varepsilon})$ — обмежена множина в просторі $M(m, \mathbb{R})$. Беремо $n \in \mathbb{N}$ і $x \in S_{-\varepsilon}$. Тоді, поклавши

$$h_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha(x); \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\alpha(x),$$

отримаємо вкладення (2.26).

Для кожного $x \in S_{-\varepsilon}$ матриця $\alpha(x)$ невироджена, а тому в $M(m, \mathbb{R})$ існує окіл U_x точки $\alpha(x)$, для якого $h_n(x)(B_r) \subset \gamma(B_r) \subset g_n(x)(B_r)$ при всіх $\gamma \in U_x$ (достатньо взяти кулю з центром в точці x радіусу $r(x) < \dfrac{1}{n\,\|\alpha(x)^{-1}\|}$, де $\|\cdot\|$ — операторна норма). Максимальний радіус $r(x)$ кульового околу U_x неперервно залежить від матриці $\alpha(x) \in \big\{\gamma \mid |\det\gamma| = 1\big\}$, а оскільки $\overline{\alpha(S_{-\varepsilon})}$ — компакт, то $\inf\limits_{x \in S_{-\varepsilon}} r(x) = r_1 > 0$.

Нехай $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_p}\}$ — скінченне покриття $\alpha(S_{-\varepsilon})$ околами вказаного вигляду. Взявши до уваги неперервність відображення $\alpha(\cdot)$, розбиваємо поверхню $S_{-\varepsilon}$ в диз'юнктне об'єднання борелівських підмножин: $S_{-\varepsilon} = \bigvee\limits_{k=1}^{p} A_k$, де $A_1 = \alpha^{-1}(U_{x_1})$; $A_k = \alpha^{-1}(U_{x_k} \setminus \bigcup\limits_{j<k} U_{x_j})$, $k > 1$. Якщо тепер покласти $h_n \big|_{A_k} = h_n(x_k)$; $g_n \big|_{A_k} = g_n(x_k)$, послідовності h_n та g_n задовольнятимуть бажані умови. При цьому послідовності функцій $\big|\det h_n(\cdot)\big|$ і $\big|\det g_n(\cdot)\big|$ рівномірно на $S_{-\varepsilon}$ збігаються до $\big|\det\alpha(\cdot)\big| \equiv 1$. Окрім того, послідовності h_n та g_n є рівномірно обмеженими, а тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ можемо обрати окіл $W = B_{r_1}$ незалежним від x так, що для кожного $x \in S_{-\varepsilon}$ і кожного $B \in \mathcal{B}(W)$ виконується умова (2.26). Тому для кожного $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ мають місце вкладення $\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{h_n}} A \subset \Phi_{B_r}^{\vec{X}} A \subset \Phi_{B_r}^{\vec{X}_{g_n}} A$, і завдяки невід'ємності міри μ нерівності

$$\mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{h_n}} A) \leqslant \mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}} A) \leqslant \mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}_{g_n}} A). \tag{2.27}$$

Зафіксуємо $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ і нехай послідовності h_n і g_n обрано також таким чином, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in S_{-\varepsilon}$ виконуються вкладення:

$$\left|\det h_n(x)\right| \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right); \qquad \left|\det g_n(x)\right| \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \tag{2.28}$$

Тоді з нерівностей (2.25), (2.27) і (2.28) робимо висновок: для кожного $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ і кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $r_0 > 0$ ($r_0 < r_1$) таке, що при всіх $r \in (0, r_0)$ виконуються нерівності:

$$-\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma_{\vec{Y}}(A) \leqslant \frac{\mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}} A)}{\lambda_m(B_r)} \leqslant \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sigma_{\vec{Y}}(A),$$

звідки випливає існування міри $\sigma_{\vec{X}}$ на S і тотожність: $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}$.

Крок 3. Доведемо рівність мір $\sigma_{\vec{Z}}$ і $\sigma_{\vec{X}}$ на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Достатньо довести рівність

$$\int\limits_S f \, d\sigma_{\vec{Z}} = \int\limits_S f \, d\sigma_{\vec{X}} \tag{2.29}$$

для обмежених рівномірно неперервних на S функцій (див. [17, с. 44]).

Перш за все помітимо, що для $\varepsilon > 0$ для простої борелівської функції f на S виконується рівність:

$$\int\limits_{S_{-\varepsilon}} f \, d\sigma_{\vec{Z}} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \widehat{f} \, d\mu. \tag{2.30}$$

Якщо f — обмежена борелівська функція на S, то для кожного $\delta > 0$ існує проста борелівська функція g на S, для якої $\sup\limits_{S_{-\varepsilon}} |f - g| \leqslant \delta$. Тому

$\sup\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} |\widehat{f} - \widehat{g}| \leqslant \delta$ і виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \widehat{f}\, d\mu - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} f\, d\sigma_{\vec{Z}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \widehat{g}\, d\mu - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} g\, d\sigma_{\vec{Z}} \right| + \delta \cdot \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \mu(\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}) + \delta \cdot \sigma_{\vec{Z}}(S_{-\varepsilon}),$$

звідки і випливає рівність (2.30) для обмеженої борелівської функції f.

Якщо тепер h — рівномірно неперервна обмежена функція в околі $S_{-\varepsilon}$, то $\sup\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} \left| h - \widehat{h\big|_{S_{-\varepsilon}}} \right| \to 0$ при $r \to 0+$, а тому з (2.30) отримуємо рівність:

$$\int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\big|_{S_{-\varepsilon}} d\sigma_{\vec{Z}} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu. \tag{2.31}$$

Для обмеженої рівномірно неперервної функції f на S розглянемо відповідну функцію $\widetilde{f} = f \circ g_N \circ P_1 \circ g^{-1}$ на U, (тобто $\widetilde{f}\big(g(x,u)\big) = f\big(g(x,0)\big)$). Тоді $\widetilde{f}$ є також обмеженою та рівномірно неперервною, тому рівність (2.29) достатньо довести для обмежених функцій, рівномірно неперервних в околах множин $S_{-\varepsilon}$.

Оскільки $\sigma_{\vec{Z}}(S \backslash S_{-\varepsilon}) \to 0$, то для будь-якої обмеженої борелівської функції f на S має місце збіжність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{S_{-\varepsilon}} f\, d\sigma_{\vec{Z}} = \int\limits_{S} f\, d\sigma_{\vec{Z}}.$$

Зрозуміло, що аналогічна рівність є справедливою і для набору векторних полів $\vec{X}$, як і аналоги формул (2.30) і (2.31). Тому для перевірки рівності (2.29) достатньо для всякої функції h, рівномірно неперервної та обмеженої в околі

$\widetilde{U}$ поверхні $S\Big($точніше в $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} g\big(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1(\varepsilon)\big)\Big)$, довести рівність:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\lim_{r\to 0+}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\left(\int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}} h\,d\mu - \int\limits_{\Phi_{B_r}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon}} h\,d\mu\right) = 0. \tag{2.32}$$

З умов (2.23)–(2.24) випливає рівність:

$$X_k(x) = Z_k(x) + Q_k(x),$$

де поле Q_k дотикається до поверхні S; при кожному $\varepsilon > 0$ всі три поля визначені та належать до класу C_b^1 в околі $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$.

Нехай $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$; $\vec{t} \neq \vec{0}$. Розглянемо векторні поля:

$$X = \frac{1}{\|\vec{t}\|}\sum_{k=1}^{m} t_k X_k, \qquad Z = \frac{1}{\|\vec{t}\|}\sum_{k=1}^{m} t_k Z_k, \qquad Q = \frac{1}{\|\vec{t}\|}\sum_{k=1}^{m} t_k Q_k.$$

Тоді $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}} x = \Phi_{\|\vec{t}\|}^{X} x$; $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x = \Phi_{\|\vec{t}\|}^{Z} x$ (у випадку, якщо ліві частини мають зміст).

Існує число L, яке обмежує зверху норми $\|X_\varphi(\cdot)\|$, $\|Z_\varphi(\cdot)\|$, $\|X'_\varphi(\cdot)\|$, $\|Z'_\varphi(\cdot)\|$ у всіх картах вихідного атласу і при всіх $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$ ($\vec{t} \neq \vec{0}$). Тоді за лемою 1 з роботи [10], існують числа $K_1 > 0$ та $\eta > 0$ такі, що для будь-якої карти вихідного атласу при $|s| < \eta$ виконується нерівність:

$$\left\|\Phi_s^{X_\varphi}\big(\varphi(x)\big) - \Phi_s^{Z_\varphi}\Phi_s^{X_\varphi - Z_\varphi}\big(\varphi(x)\big)\right\| \leqslant K_1 s^2.$$

(якщо, звичайно, ліва частина нерівності має зміст).

Оскільки Q є дотичним до S, зменшенням η можемо також забезпечити виконання умови

$$x \in S_{-\varepsilon},\ |s| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \Phi_s^{Q} x \in S_{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Зменшуючи, якщо це необхідно, $\eta > 0$ з урахуванням леми 2.9 домагаємося також можливості для кожної точки $x \in S_{-\varepsilon}$ і $|s| < \eta$ помістити $\Phi_s^X x$ і $\Phi_s^Z \Phi_s^Q x$ в область визначення однієї карти φ $\big($образ якої містить кулю з центром в т. $\varphi(x)\big)$, що дозволяю скористатися нерівністю (2.22).

Отримуємо нерівність:

$$\rho(\Phi_s^X x, \Phi_s^Z \Phi_s^Q x) \leqslant C K_1 s^2,$$

звідки при $\vec{r} \in \mathbb{R}^m$, $\|\vec{r}\| \in (0, \eta)$ випливає вкладення:

$$\Phi_{\vec{r}}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset \left(\Phi_{\vec{r}}^{\vec{Z}}(S_{-\frac{\varepsilon}{2}})\right)_{K_2\|r\|^2}, \tag{2.33}$$

де $K_2 = C K_1$.

З умови рівномірної ліпшицевості дифеоморфізмів $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}$ (лема 1 з роботи [9]) існує стала $L > 1$ така, що при $\|\vec{t}\| < r$ для $x, y \in U$ має місце нерівність: $\rho(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x, \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} y) \leqslant L \rho(x, y)$ (якщо ліва частина нерівності має зміст).

Тому $\left(\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} S_{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)_{K_2\|\vec{t}\|^2} \subset \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \left((S_{-\frac{\varepsilon}{2}})_{K\|\vec{t}\|^2}\right)$ при $K = K_2 \cdot L$, і з (2.33) випливає вкладення $\Phi_{B_r}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset \Phi_{B_r}^{\vec{Z}} \left((S_{-\frac{\varepsilon}{2}})_{Kr^2}\right)$.

За зауваженням 2.4 існують такі сталі $\widetilde{C_1}$ та C_1, що при достатньо малих $\gamma > 0$ має місце вкладення

$$(S_{-\frac{\varepsilon}{2}})_\gamma \subset g(N_{-\frac{3}{8}\varepsilon} \times B_{\widetilde{C_1 \gamma}}) \subset \Phi_{B_{C_1\gamma}}^{\vec{Z}}(S_{-\frac{\varepsilon}{4}}). \tag{2.34}$$

Тепер очевидна рівність $\Phi_{B_{r_1+r_2}}^{\vec{Z}} = \Phi_{B_{r_1}}^{\vec{Z}} \circ \Phi_{B_{r_2}}^{\vec{Z}}$ дозволяє з (2.33) і (2.34) отримати вкладення:

$$\Phi_{B_r}^{\vec{X}} S_{-\varepsilon} \subset \Phi_{B_{r+M_1 r^2}}^{\vec{Z}}(S_{-\frac{\varepsilon}{4}}), \tag{2.35}$$

де $M_1 = K C_1$.

Аналогічно отримуємо вкладення:

$$\Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \subset \Phi^{\vec{X}}_{B_{r+M_2 r^2}} (S_{-\frac{\varepsilon}{4}}), \tag{2.36}$$

З (2.35)–(2.36) отримуємо:

$$\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \triangle \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \subset \big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r+M_1 r^2}} (S_{-\frac{\varepsilon}{4}}) \backslash \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\big) \cup \big(\Phi^{\vec{X}}_{B_{r+M_2 r^2}} (S_{-\frac{\varepsilon}{4}}) \backslash \Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\big). \tag{2.37}$$

Переходимо до доведення рівності (2.32). Беремо $\varepsilon > 0$ і нехай $\delta = \delta(\varepsilon) = \max\big\{\sigma_{\vec{X}}(S \backslash S_{-\varepsilon}); \sigma_{\vec{Z}}(S \backslash S_{-\varepsilon})\big\}$. Існує $r_0 = r_0(\varepsilon)$ таке, що $\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r_0}} S_{-\varepsilon} \subset g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$; $\Phi^{\vec{X}}_{B_{r_0}} S_{-\varepsilon} \subset g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$.

При $r \in (0, r_0)$ маємо оцінку:

$$\left| \int\limits_{\Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu - \int\limits_{\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu \right| \leqslant \sup_{\tilde{U}} |h| \cdot \mu(\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon} \triangle \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}). \tag{2.38}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \Big[\mu\big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_{r+M_1 r^2}} (S_{-\frac{\varepsilon}{4}}) \backslash \Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\big) + \mu\big(\Phi^{\vec{X}}_{B_{r+M_2 r^2}} (S_{-\frac{\varepsilon}{4}}) \backslash \Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}\big)\Big] = \\ &\qquad = \sigma_{\vec{Z}}(S_{-\frac{\varepsilon}{4}} \backslash S_{-\varepsilon}) + \sigma_{\vec{X}}(S_{-\frac{\varepsilon}{4}} \backslash S_{-\varepsilon}) < 2\delta, \end{aligned} \tag{2.39}$$

то з (2.37)–(2.39) випливає існування $r_1 = r_1(\delta) > 0$ такого, що при $r \in (0, r_1)$ виконується нерівність:

$$\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \left(\int\limits_{\Phi^{\vec{Z}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu - \int\limits_{\Phi^{\vec{X}}_{B_r} S_{-\varepsilon}} h\, d\mu \right) \right| \leqslant \sup_{\tilde{U}} |h| \cdot 3\delta.$$

Граничний перехід $r \to 0+$ дає нерівність

$$\left| \int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\, d\sigma_{\vec{Z}} - \int\limits_{S_{-\varepsilon}} h\, d\sigma_{\vec{X}} \right| \leqslant \sup_{\widetilde{U}} |h| \cdot 3\delta(\varepsilon),$$

звідки і випливає (2.32).

Теорему доведено. ■

Зауваження 2.8. *Твердження теореми 2.3 залишається вірним також у тому випадку, коли трійки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ і $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ узгоджені в широкому сенсі і при цьому міри $\sigma_{\vec{Y}}$ і $\sigma_{\vec{Z}}$ є скінченними на S.*

2.6 Поверхневі міри другого типу

Нехай многовид M наділено рівномірною структурою; ω — асоційована форма поверхні S; трійки $\{S, \vec{Y}, \mu\}$ та $\{S, \vec{Z}, \mu\}$ узгоджені. Тоді міри $\dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Y})\right| \Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Y}}$ і $\dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Z}}$ співпадають на $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$.

Дійсно, поклавши для зручності $\left|\omega(\vec{Y})\right| \Big|_S = f$, $\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S = g$ і використавши лему 2.8, отримуємо, що трійки $\{S, \widehat{f^{-\frac{1}{m}}\vec{Y}}, \mu\}$ та $\{S, \widehat{g^{-\frac{1}{m}}\vec{Z}}, \mu\}$ узгоджені в широкому сенсі і при цьому

$$\sigma_{\vec{Y}} = f \cdot \sigma_{\widehat{f}^{-\frac{1}{m}}\vec{Y}}; \qquad \sigma_{\vec{Z}} = g \cdot \sigma_{\widehat{g}^{-\frac{1}{m}}\vec{Z}}.$$

А оскільки $\left|\omega(\widehat{f}^{-\frac{1}{m}}\vec{Y})\right| \Big|_S = f^{-1}\left|\omega(\vec{Y})\right| \Big|_S = 1 = g^{-1}\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S = \left|\omega(\widehat{g}^{-\frac{1}{m}}\vec{Z})\right| \Big|_S$, то співпадіння вказаних мір випливає з теореми 2.3 і зауваження 2.8.

Тим самим доведено коректність наступного означення.

Означення 2.7. *Поверхневою мірою другого типу на S, індукованою мірою μ і асоційованою формою ω, назвемо міру $\mu_\omega = \dfrac{1}{\left|\omega(\vec{Z})\right| \Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{Z}}$, де $\vec{Z}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів класу $C_b^1(M)$, які попарно кому-*

тують і для яких трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ *узгоджена.*

2.7 Висновки за розділом

У даному розділі запропоновано підхід для побудови асоційованої поверхневої міри (першого типу) на поверхні скінченної корозмірності, вкладеній у банахів многовид з обмеженою структурою. Наведено достатні умови, за яких може бути використана вказана конструкція.

Доведено низку властивостей запропонованої конструкції. Зокрема, виявлено незалежність поверхневої міри від строго трансверсального до поверхні набору векторних полів з точністю до гладкої функції, що задається асоційованою диференціальною формою поверхні. Для банахових многовидів з рівномірною структурою введено поняття поверхневої міри другого типу, індукованої мірою на многовиді та асоційованою формою поверхні.

Основні результати розділу представлені у роботі [13].

РОЗДІЛ 3
ТРАНЗИТИВНІСТЬ ЗАПРОПОНОВАНОЇ КОНСТРУКЦІЇ ТА УЗГОДЖЕНІСТЬ З КЛАСИЧНИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

В даному розділі досліджене питання транзитивності конструкції, запропонованої у розділі 2. Нехай M — банахів многовид з рівномірною структурою; Σ — вкладена в M, а S — вкладена в Σ поверхня скінченної корозмірності; μ — борелівськая міра на M. Поверхневу міру на S можна отримати двома шляхами: безпосередньо запропонованим методом і в два етапи: спочатку будується міра на Σ, індукована мірою μ і вкладенням Σ в M, а потім тим же шляхом будується міра на S, індукована вкладенням S в Σ. Як буде показано далі, вказані підходи є еквівалентними. Основні одержані результати розділу представлені у роботі [15].

Крім того розглянуто приклади використання запропонованої у розділі 2 конструкції побудови поверхневих мір та досліджено адекватність вказаного підходу по відношенню до класичних результатів. Розглянуто випадок скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ та скінченновимірного ріманового многовиду. Вказані приклади наведено у статтях [33, 35].

3.1 Транзитивні властивості поверхневих мір

Як і раніше, вважаємо, що M є банаховим C^2-многовидом з обмеженою структурою, моделлю якого є дійсний банахів простір E. Вважаємо також, що на M зафіксовано деякий обмежений атлас $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, а тому і індукована ним внутрішня метрика ρ.

Нехай $\Sigma \subset M$ — вкладена в M поверхня корозмірності m відповідно до означення 2.1. Тобто існує многовид N_1 з обмеженою структурою, модельний простір якого E_1 є підпростором в E корозмірності m (в подальшому E будемо ототожнювати з $E_1 \dotplus \mathbb{R}^m$); V_1 — відкритий окіл нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ і $g_1 \colon N_1 \times V_1 \to$

$\to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм на відкриту підмножину U в M. При цьому $\Sigma = g_1\big(N_1 \times \{\vec{0}\}\big)$.

Для $\varepsilon > 0$ множина $\Sigma_{-\varepsilon}$ визначається формулою:

$$\Sigma_{-\varepsilon} = \big\{x \in \Sigma \mid \rho(x, M\backslash U) \geqslant \varepsilon\big\}. \tag{3.1}$$

Поверхня Σ природним чином наділена структурою банахового многовиду з обмеженим атласом. Якщо Ω_1 — обмежений атлас на N_1, то карта $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{U} \to E_1$ атласу Ω_1 індукує на M карту

$$\varphi = (\widetilde{\varphi} \times id) \circ (g_1)^{-1}\colon g_1(\widetilde{U} \times V) \to \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \times V \subset E,$$

узгоджену з атласом Ω.

Обмеження карт на Σ $\Big(\varphi\big|_{\Sigma}\colon g_1\big(\widetilde{U} \times \{\vec{0}\}\big) \to \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \times \{\vec{0}\} \subset E_1\Big)$ утворює обмежений атлас Ω_Σ на Σ (образ атласу Ω_1 при ізоморфізмі g_1). Відповідну метрику на Σ будемо позначати через ρ_Σ.

Нехай тепер S — вкладена в Σ поверхня корозмірності n. Покажемо, что S є вкладеною в M поверхнею корозмірності $m + n$.

Позначимо через g_2 обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення S в Σ: $g_2\colon N_2 \times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$ (тут V_2 — відкритий окіл нуля $\mathbb{R}^n$; U_1 — відкрита в Σ. Без втрати загальності вважаємо: $E = E_1 \dotplus \mathbb{R}^m = E_2 \dotplus \mathbb{R}^{m+n}$, де E_2 — модельний простір многовиду N_2.

Тоді обмежений ізоморфізм

$$h\colon N_2 \times V_2 \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M, \tag{3.2}$$

що визначає вкладення S в M, будуємо як композицію наступних трьох обмежених ізоморфізмів:

$$g_2 \times id\colon N_2 \times V_2 \times V_1 \to U_1 \times V_1 \subset \Sigma \times V_1;$$
$$\big((g_1)_{N_1}\big)^{-1} \times id\colon U_1 \times V_1 \to \widehat{U} \times V_1 \subset N_1 \times V_1$$

(тут $(g_1)_{N_1} = g_1 \circ i_1\colon N_1 \to \Sigma$ — ізоморфізм N_1 та Σ, індукований відображенням g_1; $\widehat{U} = (g_{N_1})^{-1}(U_1)$ — відкрита підмножина в N_1) і, нарешті,

$$g_1\colon N_1 \times V_1 \to U \subset M.$$

При цьому $h\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^{m+n}}\}\big) = g_2\big(N_2 \times \{\vec{0_{\mathbb{R}^n}}\}\big) = S$, а множина $\widetilde{U} = h(N_2 \times V_2 \times V_1)$ є відкритою підмножиною U, причому $\widetilde{U} \bigcap \Sigma = U_1$.

Для $\varepsilon > 0$ відповідно до формули (3.1) визначено множину $S_{-\varepsilon} = \big\{x \in S \mid \rho(x, M\backslash\widetilde{U}) \geqslant \varepsilon\big\}$. Наслідком вкладень $S \subset \Sigma$ та $\widetilde{U} \subset U$ є вкладення

$$S_{-\varepsilon} \subset \Sigma_{-\varepsilon}. \tag{3.3}$$

З іншого боку $\rho(x, M\backslash\widetilde{U}) = \min\big\{\rho(x, M\backslash U), \rho(x, U\backslash\widetilde{U})\big\}$. Крім того, існують такі сталі c_1 та c_2 (залежні від вибору атласів на M та Σ; для атласу Ω_M, що визначається умовою (2.4), можна взяти $c_1 = c_2 = 1$), що

$$c_1\rho(x, U\backslash\widetilde{U}) \geqslant \rho_\Sigma(x, \Sigma\backslash U_1) \geqslant c_2\rho(x, U\backslash\widetilde{U}).$$

Тому для кожного $\varepsilon > 0$ справедливими є також вкладення

$$S_{-c_1\varepsilon}(\Sigma) \bigcap \Sigma_{-\varepsilon} \subset S_{-\varepsilon}(M) \subset S_{-c_2\varepsilon}(\Sigma) \bigcap \Sigma_{-\varepsilon}, \tag{3.4}$$

де через $S_{-\varepsilon}(M)$ та $S_{-\varepsilon}(\Sigma)$ позначено множини $S_{-\varepsilon}$, індуковані вкладеннями S в M та Σ відповідно.

3.1.1 Асоційована форма поверхні Нехай Σ — вкладена в M поверхня корозмірності m; S — вкладена в Σ поверхня корозмірності n. Тоді, як показано вище, S являє собою вкладену в M поверхню корозмірності $m+n$.

Нехай α — асоційована m-форма вкладення поверхні Σ в M відповідно до означення 2.2, тобто α — диференціальна m-форма, визначена на U (або більшій відкритій підмножині в M), класу C_b^1, така, що для довільної точки $x \in \Sigma$ виконується рівність $T_x\Sigma = \big\{Y \in T_xM \mid i_Y\alpha(x) = 0\big\}$, де i_Y — внутрішній добуток зовнішньої форми на вектор Y. При цьому для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ $\big(\varepsilon \in (0,r)\big)$ існує таке $\delta > 0$, що для всякого $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ і карти $(W,\varphi) \in \Omega$ в точці x для представлення α в цій карті має місце нерівність $\Big\|\alpha_\varphi\big(\varphi(x)\big)\Big\| \geqslant \delta$.

Нехай далі β — диференціальна n-форма класу C_b^1 на $\widetilde{U}$ (див. (3.2)), обмеження якої $\widetilde{\beta}$ на $\Sigma \bigcap \widetilde{U} = U_1$ збігається з асоційованою n-формою вкладення поверхні S в Σ.

У прикладі 2.1 показано існування асоційованої форми вкладення Σ в M (а також вкладення S в Σ). Обґрунтуємо тепер існування форми β. Якщо $\widetilde{\beta}$ — асоційована форма вкладення S в Σ, то $g_2^*\widetilde{\beta}$ — асоційована форма вкладення $N_2 \times \{\vec{0}\}$ в $N_2 \times V_2$. Позначивши через P канонічний проектор $N_2 \times V_2 \times V_1$ на $N_2 \times V_2$, шукану форму β отримаємо за формулою: $\beta = \left(h^{-1}\right)^* P^* g_2^*\widetilde{\beta}$, де h визначається формулою (3.2). Дійсно, для $x \in \Sigma \bigcap \widetilde{U}$ і $u_1, \ldots, u_n \in T_xM$ маємо рівність

$$\beta(x)(u_1,\ldots,u_n) = \widetilde{\beta}(x)\left(T_x(g_2 \circ P \circ h^{-1})u_1, \ldots, T_x(g_2 \circ P \circ h^{-1})u_n\right).$$

Тому, при $x \in \Sigma \bigcap \widetilde{U}$, $u_i \in T_x\Sigma$: $\beta(x)(u_1,\ldots,u_n) = \widetilde{\beta}(x)(u_1,\ldots,u_n)$, отже, обмеження β на $\Sigma \bigcap \widetilde{U}$ збігається з $\widetilde{\beta}$. Помітимо також (зміст цього зауваження проясниться в кінці розділу), що якщо n-форма $\widetilde{\beta}$ замкнена, то і n-форма β також замкнена.

Лема 3.1. *Визначена на $\widetilde{U}$ диференціальна $(m+n)$-форма $\omega = \alpha \wedge \beta$ є* *асоційованою формою вкладення S в M.*

Доведення. За твердженням 2.3 диференціальна форма ω належить до класу $C_b^1(\widetilde{U})$, тому потрібно перевірити лише два факти:

а) Для кожної точки $x \in S$ і вектора $Y \in T_x M$ виконується умова: $(Y \in T_x S) \iff \big(i_Y \omega(x) = 0\big)$;

б) Для заданого обмеженого атласу Ω на M існує $r > 0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in (0, r)$ знайдеться $\delta > 0$, для якого для кожного $x \in S_{-\varepsilon}$ і карти $(U, \varphi) \in \Omega$ в точці x має місце оцінка: $\Big\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\Big\| \geqslant \delta$.

Зафіксуємо деяку точку $x \in S$. Перша з умов зводиться в карті до наступного. Нехай E_1 — підпростір в E корозмірності m; зовнішня m-форма α на E є такою, що для вектора $X \in E$ виконується співвідношення

$$(X \in E_1) \iff \big(i_X \alpha = 0\big);$$

E_2 — підпростір в E_1 корозмірності n; β — зовнішня n-форма на E, для якої $\widetilde{\beta} = \beta\big|_{E_1}$ задовольняє властивість: для $Y \in E_1$ виконується співвідношення

$$(Y \in E_2) \iff \big(i_Y \widetilde{\beta} = 0\big).$$

Тоді для $Y \in E$ потрібно перевірити, що

$$(Y \in E_2) \iff \big(i_Y(\alpha \wedge \beta) = 0\big).$$

Скористаємося рівністю:

$$i_Y(\alpha \wedge \beta) = (i_Y \alpha) \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge i_Y \beta. \tag{3.5}$$

Нехай спочатку $Y \notin E_1$; $E = E_1 \dot{+} L_1 = E_2 \dot{+} L_2 \dot{+} L_1$; $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в L_2; $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ — базис в L_1. Розклад в пряму суму і базиси оберемо таким чином, щоб $Y = e_{n+m}$. Отримаємо:

$$i_Y(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m-1}) = \tag{3.6}$$
$$= \frac{1}{(m-1)!\,n!} \sum_{\sigma \in S_{m+n-1}} \eta(\sigma)\, \alpha(Y, e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m-1)}) \cdot \beta(e_{\sigma(m)}, \ldots, e_{\sigma(m+n-1)}) +$$
$$+(-1)^m \frac{1}{(n-1)!\,m!} \sum_{\sigma \in S_{m+n-1}} \eta(\sigma)\, \alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)})\, \beta(Y, e_{\sigma(m+1)}, \ldots, e_{\sigma(m+n-1)}),$$

де $\eta(\sigma)$ — знак підстановки σ.

В кожному доданку останньої суми правої частини рівності (3.6) серед векторів $e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)}$ є хоча б один вектор базису $L_2 \subset E_1$. Тому $\alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)}) = 0$ для всіх $\sigma \in S_{m+n-1}$. В першій сумі правої частини рівності (3.6) не рівними нулю можуть бути лише ті доданки, для яких виконується співвідношення: $(1 \leqslant k \leqslant m-1) \Longrightarrow \big(n+1 \leqslant \sigma(k) \leqslant m+n-1\big)$, причому всі ці доданки є попарно рівними. Звідси отримуємо:

$$\left|i_Y(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m-1})\right| = \left|\alpha(e_{m+n}, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m-1})\right| \cdot \left|\beta(e_1, \ldots, e_n)\right| \neq 0.$$

Нехай тепер $Y \in E_1 \backslash E_2$. В розкладі $E = E_1 \dotplus L_1 = E_2 \dotplus L_2 \dotplus L_1$ базиси оберемо наступним чином: $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — базис в L_1; $\{e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ — базис в L_2. Розклад в пряму суму і базиси обираємо таким чином, щоб $Y = e_{m+n}$.

Тепер $i_Y \alpha = 0$ і в рівності (3.6) перша сума в правій частині обертається в нуль.У другій сумі не рівними нулю можуть бути лишь ті доданки, для яких виконується співвідношення $(1 \leqslant k \leqslant m) \Longrightarrow \big(1 \leqslant \sigma(k) \leqslant m\big)$, і всі вони рівні між собою. Тому:

$$\left|i_Y(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m-1})\right| = \left|\alpha(e_1, \ldots, e_m)\right| \cdot \left|\beta(e_{m+n}, e_{m+1}, \ldots, e_{m+n-1})\right| \neq 0.$$

Для останнього випадку, коли $Y \in E_2$ з (3.5) випливає умова $i_Y(\alpha \wedge \beta) = 0$.

При перевірці другої умови візьмемо до уваги вкладення (3.4), що виконується при достатньо малому $r > 0$ для $\varepsilon \in (0, r)$. Тому також допустимим є локальне дослідження, що призводить, в попередніх позначеннях, до оцінки знизу норми $\|\alpha \wedge \beta\|$, де α і $\widetilde{\beta}$ — зовнішні форми, визначені на E, $\widetilde{\beta} = \beta\big|_{E_1}$. При цьому передбачається, що $\|\alpha\|_E \geqslant \delta > 0$, $\|\widetilde{\beta}\|_{E_1} \geqslant \delta > 0$. Покажемо (і цього достатньо), що $\|\alpha \wedge \beta\|_E \geqslant \delta^2$.

Візьмемо $\xi > 0$ і вектори $e_1, \ldots, e_m \in E$, для яких $\|e_1\| = \ldots = \|e_m\| = 1$ і $\big|\alpha(e_1, \ldots, e_m)\big| \geqslant \delta - \xi$ та $e_{m+1}, \ldots, e_{m+n} \in E_1$, для яких $\|e_{m+1}\| = \ldots = \|e_{m+n}\| = 1$ і $\big|\widetilde{\beta}(e_{m+1}, \ldots, e_{m+n})\big| \geqslant \delta - \xi$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m}) = \\
&\qquad = \frac{1}{m!\,n!} \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \eta(\sigma)\, \alpha\big(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)}\big) \cdot \beta\big(e_{\sigma(m+1)}, \ldots, e_{\sigma(m+n)}\big) = \\
&\qquad = \alpha(e_1, \ldots, e_m) \cdot \widetilde{\beta}(e_{m+1}, \ldots, e_{m+n})
\end{aligned}
$$

(тут враховано, що $i_Y \alpha = 0$ для $Y \in E_1$). Тому $\big|(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m})\big| \geqslant (\delta - \xi)^2$, що і доводить твердження з огляду на довільність $\xi > 0$.

Лему доведено. ■

3.1.2 Трансверсальні набори векторних полів Нехай Σ — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g_1\colon N_1 \times V_1 \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення Σ в M, і $\vec{Z} := \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — набір визначених на U (або, можливо на більшій відкритій підмножині M) векторних полів класу C^1_b. Згідно означення 2.3, набір полів $\vec{Z}$ називаємо строго трансверсальним до Σ, якщо для деякої (а тому і для будь-якої) асоційованої m-форми ω поверхні Σ виконується наступна умова: для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ має місце нерівність $\big|\omega(\vec{Z})(x)\big| = \big|\omega(Z_1, \ldots, Z_m)(x)\big| \geqslant \delta$.

Нехай $\widetilde{\Sigma}$ — відкрита підмножина в Σ. Тоді $\widetilde{\Sigma}$ також являє собою вкладену в M поверхню, і відповідний ізоморфізм $g_1\colon \widetilde{N_1} \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$ є звуженням g_1 на множину $\widetilde{N_1} \times V_1$, де $\widetilde{N_1} = (g_1)^{-1}_{N_1}(\widetilde{\Sigma}) \subset N_1$; $\widetilde{U}$ — відкрита підмножина в U. Якщо m-форма ω асоційована з Σ, то вона також асоційована з $\widetilde{\Sigma}$. Якщо набір векторних полів $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ строго трансверсальний до Σ, то він також строго трансверсальний до $\widetilde{\Sigma}$.

Лема 3.2. *Нехай Σ — вкладена в M поверхня корозмірності m; S — поверхня, вкладена в Σ корозмірності n (відносно вкладення в Σ). Нехай $g_1\colon N_1 \times V_1 \to U \subset M$; $g_2\colon N_2 \times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$ — обмежені ізоморфізми, що визначають вказані вкладення; $\widetilde{g_1}\colon \widetilde{N_1} \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладену поверхню U_1. Нехай $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_{m+n}\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на $\widetilde{U}$ полів класу $C_b^1(\widetilde{U})$, що попарно комутують, причому поля $X_1, \ldots, X_n$ є дотичними до поверхні U_1, а піднабір полів $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до U_1. Тоді набір $\vec{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ обмежень на U_1 векторних полів X_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) класу $C_b^1(U_1)$ є строго трансверсальним до S при її вкладенні в Σ (однак, в якості множини $S_{-\varepsilon}$ береться множина $S_{-\varepsilon}(M)$), і поля з набору $\vec{Y}$ попарно комутують.*

Доведення. Нехай β — диференціальна n-форма на $\widetilde{U}$, обмеження якої $\widetilde{\beta}$ на U_1 являє собою асоційовану n-форму поверхні S при її вкладенні в Σ.

Беремо $\varepsilon > 0$. Згідно вкладення (3.3), $S_{-\varepsilon} \subset \Sigma_{-\varepsilon}$.

Якщо α — асоційована форма вкладення Σ в M, то, згідно леми 3.1, $\alpha \wedge \beta$ — асоційована форма вкладення S в M. Тому існує таке $\delta > 0$, що для кожного $x \in S_{-\varepsilon}$ виконується нерівність

$$\big|(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{m+n})(x)\big| \geqslant \delta.$$

Врахувавши, що $\alpha(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})(x) = 0$ для $x \in \Sigma$, якщо $i_k \leqslant n$ для деякого k, отримуємо для кожного $x \in S$ рівності

$$\begin{aligned}\big|(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{m+n})(x)\big| &= \big|\alpha(X_{n+1}, \ldots, X_{m+n})(x)\big| \cdot \big|\beta(X_1, \ldots, X_n)(x)\big| = \\ &= \big|\alpha(X_{n+1}, \ldots, X_{m+n})(x)\big| \cdot \big|\widetilde{\beta}(Y_1, \ldots, Y_n)(x)\big|. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Візьмемо $x \in S_{-\varepsilon}$. Тоді, враховуючи обмеженість α та полів X_k, з рівності (3.7) маємо

$$\left|\widetilde{\beta}(Y_1, \dots, Y_n)(x)\right| = \frac{\left|(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{m+n})(x)\right|}{\left|\alpha(X_{n+1}, \dots, X_{m+n})(x)\right|} \geqslant \frac{\delta}{C},$$

де C — стала, що не залежить від ε. Отже, одержуємо нерівність

$$\inf_{x \in S_{-\varepsilon}} \left|\widetilde{\beta}(Y_1, \dots, Y_n)(x)\right| > 0.$$

Комутація полів Y_k випливає з комутації їх потоків.

Лему доведено. ■

Наведемо найпростіший модельний приклад виконання умов леми 3.2.

Приклад 3.1. *Нехай $g_1 \colon N_1 \times V_1 \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає поверхню Σ. Якщо S — поверхня, вкладена в Σ і $g_2 \colon N_2 \times V_2 \to$ $\to U_1 \subset \Sigma$ — відповідний обмежений ізоморфізм, що визначає S, то існує строго трансверсальний до S (при вкладенні в Σ) набір визначених на U_1 векторних полів $\{Y_1, \dots, Y_n\}$, що попарно комутують (див. приклад 2.2). Нехай $\{\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n\}$ — $\widetilde{g}_1$-зв'язані з $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ векторні поля, визначені на $\widetilde{N_1} \times \{\vec{0}\}$. Визначимо векторні поля $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{n+m}$ на $\widetilde{N_1} \times V_1$ за правилом: $\widetilde{X}_k$ — P_1-зв'язане з $\widetilde{Y}_k$, $k = 1, \dots, n$ (P_1 — проектор $\widetilde{N_1} \times V_1$ на перший множник); $X_{n+k} = \dfrac{\partial}{\partial t_k}$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Тоді шукані векторні поля $X_1, \dots, X_{n+m}$ отримуємо як $\widetilde{g}_1$-зв'язані з полями $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{n+m}$.*

Зауваження 3.1. *Множини $S_{-\varepsilon}(\Sigma)$ та $S_{-\varepsilon}(M)$ в загальному випадку не співпадають, тому у лемі 3.2 для перевірки умови строгої трансверсальності набору $\vec{Y}$ до поверхні S (при її вкладенні в Σ) умова накладається на множину $S_{-\varepsilon}(M)$. Тим не менш, у прикладі 3.1 набір $\vec{Y}$ є строго трансверсальним до S відповідно до означення 2.3, тобто для множини $S_{-\varepsilon}(\Sigma)$ в якості $S_{-\varepsilon}$. Далі вимагатимемо, щоб набір $\vec{Y}$ задовольняв умови означення 2.3.*

3.1.3 Узгодженість поверхневих мір першого типу Нехай μ — скінченна борелівська міра на банаховому многовиді M, наділеному обмеженою структурою; Σ — вкладена в M поверхня корозмірності m; $g_1\colon N_1 \times V_1 \to \to U \subset M$ — обмежений ізоморфізм, що визначає вкладення Σ в M. Нехай на U (або більшій відкритій підмножині в M) задано строго трансверсальний до Σ набір $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$ повних векторних полів класу C_b^1, що попарно комутують. Крім того, передбачається, що набір векторних полів $\vec{X}$ задовольняє наступну умову: відображення $\Phi^{\vec{X}}\colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}} x \in \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{X}} \Sigma$ взаємно однозначне. Модельний приклад набору векторних полів $\vec{X}$, що задовольняють вказану умову, приведено в прикладі 2.2. Тоді, згідно означення 2.5, трійка $(\Sigma, \vec{X}, \mu)$ є узгодженою, якщо для будь-якої підстановки τ степеня m визначено міру $d_{X_{\tau(1)}} d_{X_{\tau(2)}} \dots d_{X_{\tau(m)}} \mu$ (а тому незалежну від τ), і в цьому випадку визначено поверхневу міру $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{X}}[\mu]$ на $\mathcal{B}(\Sigma)$ (див. підрозділ 2.4), для якої для кожного $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ справджується рівність

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1} d_{X_2} \dots d_{X_m} \mu)(\widehat{A}), \qquad \text{де } \widehat{A} = \Phi_{(-\infty,0]}^{X_1} \Phi_{(-\infty,0]}^{X_2} \dots \Phi_{(-\infty,0]}^{X_m} A. \quad (3.8)$$

Помітимо, що якщо $\widetilde{\Sigma}$ — відкрита підмножина в Σ, то з узгодженості трійки $(\Sigma, \vec{X}, \mu)$ випливає узгодженість трійки $(\widetilde{\Sigma}, \vec{X}, \mu)$, і при цьому звуження міри $\sigma_{\vec{X}}[\Sigma]$ на $\widetilde{\Sigma}$ збігається з поверхневою мірою $\sigma_{\vec{X}}[\widetilde{\Sigma}]$, побудованою для вкладення в M поверхні $\widetilde{\Sigma}$. Тому, не втрачаючи загальності, в подальшому будемо вважати, що множиною U_1 є вся поверхня Σ. У цьому випадку $\widetilde{U} = U$, і точка $x \in S$ міститься в $S_{-\varepsilon}$ в тому і тільки тому випадку, коли x лежить в $\Sigma_{-\varepsilon}$.

Теорема 3.1. *Нехай в умовах попередніх позначень $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_{m+n}\}$ — строго трансверсальний до S набір визначених на U повних полів класу C_b^1, що попарно комутують, причому поля $X_1, \dots, X_n$ є дотичними до поверхні Σ, а піднабір полів $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \dots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до Σ, і при цьому відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}\colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \to \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\widetilde{\vec{X}}} \Sigma$ взаємно однозначне. Крім того, набір $\vec{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ обмежень на Σ векторних полів X_k ($k = 1, 2, \dots, n$)*

класу C_b^1 є строго трансверсальним до S при її вкладенні в Σ. Тоді, якщо трійка $(S, \vec{X}, \mu)$ є узгодженою, то узгодженими є також трійки $(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu)$ та $(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}})$ (при вкладенні S в Σ), і при цьому

$$\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}]. \tag{3.9}$$

Доведення. За умовою теореми строга трансверсальність до поверхні набору векторних полів виконується для обох вказаних трійок. Гарантується також взаємна однозначність відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}$ на $\Sigma \times \mathbb{R}^m$, а тому для перевірки узгодженості трійки $(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu)$ потрібно переконатися лише в існуванні похідної $d_{X_{\tau(n+1)}} d_{X_{\tau(n+2)}} \dots d_{X_{\tau(n+m)}} \mu$ міри μ для будь-якої підстановки τ множини $\{n+1, n+2, \dots, n+m\}$. Але вказаний факт випливає з аналогічної умови завдяки узгодженості трійки $(S, \vec{X}, \mu)$, тому трійка $(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu)$ є узгодженою і при цьому для $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ за умовою (3.8) отримуємо рівність

$$\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}(A) = (d_{X_{n+1}} d_{X_{n+2}} \dots d_{X_{n+m}} \mu)(\widehat{A}), \qquad \text{де } \widehat{A} = \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\times(-\infty,0]} A \in U. \tag{3.10}$$

Перейдемо до перевірки узгодженості трійки $(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}})$. Оскільки згідно умови узгодженості трійки $(S, \vec{X}, \mu)$, траєкторії $\Phi_t^{X_k}(\cdot)$ векторних полів $X_1, \dots, X_n$ визначені при всіх $t \in \mathbb{R}$ (і не виходять за межі Σ, оскільки поля $X_1, \dots, X_n$ є дотичними до Σ), то ця ж властивість зберігається і для полів $Y_1, \dots, Y_n$. З узгодженості трійки $(S, \vec{X}, \mu)$ також випливає взаємна однозначність відображення $\Phi^{\vec{Y}}$ на $S \times \mathbb{R}^n$.

Завдяки комутації векторних полів з набору $\vec{X}$ для $k = 1, 2 \dots, n$ і $t \in \mathbb{R}$ для всіх $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ має місце рівність

$$\widehat{\Phi_t^{Y_k} A} = \Phi_t^{X_k} \widehat{A}. \tag{3.11}$$

Тому з (3.10) випливає існування $d_{Y_{\tau(1)}} d_{Y_{\tau(2)}} \dots d_{Y_{\tau(n)}} \sigma_{\widetilde{\vec{X}}}$, оскільки для $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$

завдяки умовам (3.10)–(3.11) виконується рівність:

$$\begin{aligned}(d_{Y_{\tau(1)}}\dots d_{Y_{\tau(n)}}\sigma_{\widetilde{\vec{X}}})(A) = (d_{X_{\tau(1)}}\dots d_{X_{\tau(n)}}d_{X_{n+1}}\dots d_{X_{n+m}}\mu)(\widehat{A}) = \\ = (d_{X_1}\dots d_{X_{n+m}}\mu)(\widehat{A}),\end{aligned} \tag{3.12}$$

отже, трійка $(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}})$ узгоджена, і при цьому для кожного $A \in \mathcal{B}(S)$ виконується рівність

$$\sigma_{\vec{Y}}[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}](A) = (d_{Y_1}\dots d_{Y_n}\sigma_{\widetilde{\vec{X}}})\left(\Phi^{Y_1}_{(-\infty,0]}\Phi^{X_2}_{(-\infty,0]}\dots\Phi^{Y_n}_{(-\infty,0]}A\right). \tag{3.13}$$

Перейдемо до перевірки рівності (3.9). Нехай $A \in \mathcal{B}(S)$. Тоді

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1}\dots d_{X_{n+m}}\mu)(\widehat{\widehat{A}}), \qquad \text{де } \widehat{\widehat{A}} = \Phi^{X_1}_{(-\infty,0]}\Phi^{X_2}_{(-\infty,0]}\dots\Phi^{X_{m+n}}_{(-\infty,0]}A. \tag{3.14}$$

Множина $\widetilde{A} = \Phi^{X_1}_{(-\infty,0]}\Phi^{X_2}_{(-\infty,0]}\dots\Phi^{X_n}_{(-\infty,0]}A$ належить $\mathcal{B}(\Sigma)$, тому $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{\widetilde{A}}$ і, зважаючи на (3.12)–(3.14) отримуємо рівність

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{Y_1}\dots d_{Y_n}\sigma_{\widetilde{\vec{X}}})(\widetilde{A}) = \sigma_{\vec{Y}}[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}](A).$$

Теорему доведено. ∎

Припускаючи, що $U_1 = \Sigma$, модифікуємо тепер приклад 3.1 таким чином, щоб забезпечити виконання умов теореми 3.1.

Приклад 3.2. *Нехай $\vec{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ – строго трансверсальний до S (при вкладенні в Σ) набір повних векторних полів на Σ з прикладу 2.2. Поля $X_1, \dots, X_n$ на U визначаємо так само, як і в прикладі 3.1. В якості полів $X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ візьмемо поля $Z_1, \dots, Z_m$, побудовані в прикладі 2.2 для вкладення Σ в M. Тоді набір векторних полів $\vec{X}$ задовольняє умови теореми 3.1.*

Доведення. За побудовою поля $X_1, \dots, X_n$ є дотичними до поверхні Σ, а піднабір полів $\{X_{n+1}, \dots, X_{m+n}\}$ строго трансверсальний до Σ. В якості асоційованої форми вкладення S в M візьмемо форму $\alpha \wedge \beta$ з леми 3.1. Тоді для $x \in S$

маємо рівність

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{m+n})(x) = \alpha(X_{n+1}, \ldots, X_{m+n})(x) \cdot \widetilde{\beta}(Y_1, \ldots, Y_n)(x),$$

а тому набір $\{\vec{X}\}$ є строго трансверсальним до S (при вкладенні в M).

Повнота піднабору $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ та взаємна однозначність відображення $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}} \colon \Sigma \times \mathbb{R}^m \to \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\mathbb{R}^m}\Sigma$ показана у прикладі 2.2, тому потрібно лише показати повноту набору $\vec{X}$ на U та взаємну однозначність відображення $\Phi^{\vec{X}} \colon S \times \mathbb{R}^{n+m} \to \Phi^{\vec{X}}_{\mathbb{R}^{n+m}} S$.

Розглянемо h-зв'язані з X_i поля Z_i на $N_2 \times V_2 \times V_1$. Якщо W_1 та W_2 — компактно вкладені кулі у V_1 та V_2 відповідно, а f_1 та f_2 — відповідні їм відображення з прикладу 2.2, то потік набору $\vec{Z}$ визначається за формулою $\Phi^{\vec{Z}}_{(\vec{t_1}, \vec{t_2})}(z, \vec{v_2}, \vec{v_1}) = \big(z, \varphi_2(\vec{v_2}), \varphi_1(\vec{v_1})\big)$, де $(z, \vec{v_2}, \vec{v_1}) \in N_2 \times V_2 \times V_1$, $(\vec{t_1}, \vec{t_2}) \in \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\varphi_i \colon V_i \to V_i$, $i = 1, 2$ — такі функції, що $\varphi_i(\vec{u}) = f_i\big(f_i^{-1}(\vec{u}) + \vec{t_i}\big)$ при $\vec{u} \in W_i$ та $\varphi_i(\vec{u}) = \vec{u}$ в протилежному випадку. Звідси випливає повнота набору $\vec{Z}$ та взаємна однозначність потоку на $N_2 \times \{\vec{0}\} \times \{\vec{0}\}$, а тому і аналогічні умови для набору $\vec{X}$. ∎

3.1.4 Узгодженість поверхневих мір другого типу Наступна конструкція передбачає невід'ємність міри μ і задання на M рівномірного атласу.

Якщо α — асоційована m-форма вкладеної в M поверхні Σ, а трійка $(\Sigma, \vec{X}, \mu)$ узгоджена, то міра μ_α на Σ задається формулою: $\mu_\alpha = \dfrac{1}{\big|\alpha(\vec{X})\big|}\, \sigma_{\vec{X}}$. Коректність даного означення забезпечується інваріантністю відносно переходу до іншої узгодженої трійки $(\Sigma, \vec{Z}, \mu)$ (див. теорему 2.3).

Нехай S — вкладена в Σ поверхня корозмірності n, і β — диференціальна n-форма класу C^1_b на $\widetilde{U}$, обмеження якої $\widetilde{\beta}$ на Σ є асоційованою формою вкладення S в Σ. Відповідно до леми 3.1, $(m+n)$-форма $\alpha \wedge \beta$ — асоційована форма вкладення S в M.

Оскільки поверхня S вкладена у многовид M, наділений рівномірною структурою, то на ній також коректно визначена міра $\mu_{\alpha\wedge\beta}$. Однак атлас на Σ, узгоджений з вкладенням Σ в M, в загальному випадку рівномірним не є. Проте завдяки вкладенню (3.3) можно використати лему 2.9, за якою перехід від міри ν на поверхні Σ до індукованої вкладенням S в Σ міри $\nu_{\widetilde{\beta}}$ є коректним $\big(\nu_{\widetilde{\beta}}$ вводиться формулою $\nu_{\widetilde{\beta}} = \dfrac{1}{\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|}\sigma_{\vec{Y}}[\nu]$ інваріантно відносно переходу до іншої узгодженої трійки $(S, \widetilde{\vec{Y}}, \nu)\big)$.

Лема 3.3. *Нехай трійка* $(S, \vec{Z}, \mu)$ *узгоджена; функція* $\widehat{f}$ *визначена в області, де задані векторні поля з набору* $\vec{Z}$, *і належить до класу* C_b^1; $\widehat{f}$ *є першим інтегралом полів* Z_k *набору* $\vec{Z}$ *і* $\widehat{f}\big|_S = f$. *Тоді трійка* $(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu)$ *узгоджена і має місце рівність:*

$$\sigma_{\vec{Z}}[\widehat{f}\cdot\mu] = f\cdot\sigma_{\vec{Z}}[\mu]. \tag{3.15}$$

Якщо ж трійка $(S, \vec{Z}, \mu)$ *є узгодженою в широкому сенсі, а функція* $\widehat{f}$ *визначена і належить до класу* C_b^1 *лише в околах вигляду* $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}}\times W_1)$, *тоді трійка* $(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu)$ *також є узгодженою в широкому сенсі і виконується рівність* (3.15).

Доведення. У випадку узгодженої трійки $(S, \vec{Z}, \mu)$ для перевірки узгодженості трійки $(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu)$ потрібно лише перевірити існування міри $d_{Z_{\tau(1)}}d_{Z_{\tau(2)}}\dots d_{Z_{\tau(m)}}(\widehat{f}\cdot\mu)$ для будь-якої підстановки τ степеня m. У випадку, якщо функція $h\colon M\to\mathbb{R}$ належить до класу C_b^1 і міра ν є диференційовною вздовж векторного поля X, диференційовною є також міра $h\cdot\nu$ і при цьому має місце рівність

$$d_X(h\cdot\nu) = \partial_X h\cdot\nu + h\cdot d_X\nu.$$

Оскільки $\widehat{f}$ є першим інтегралом кожного векторного поля Z_k, то для кожного k маємо рівність $d_{Z_k}(\widehat{f}\nu) = \widehat{f}d_{Z_k}\nu$ (якщо $d_{Z_k}\nu$ існує). Повторне використання даної рівності дозволяє зробити висновок про те, що перехід від міри μ до міри $\widehat{f}\cdot\mu$ зберігає узгодженість трійки.

Для отримання формули (3.15) зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і візьмемо такий окіл W

нуля в $\mathbb{R}^m$, що $\Phi_W^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon} \subset g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$. Крім того, помітимо, що значення міри $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$ на $S_{-\varepsilon}$ повністю визначається значенням міри μ та векторних полів в околі $S_{-\varepsilon}$ вигляду $g(N_{-\frac{\varepsilon}{2}} \times W_1)$.

Нехай h — кусково постійна борелівська функція на $S_{-\varepsilon}$, $h = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k j_{A_k}$, де $A_k \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$; $S_{-\varepsilon} = \bigvee\limits_{k=1}^{p} A_k$. Продовжуючи функцію h до функції, постійної на траєкторіях векторних полів набору $\vec{Z}$, отримуємо коректно визначену в $\Phi_W^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}$ борелівську функцію $\widehat{h}$ і відповідну міру $\widehat{h} \cdot \mu$.

Якщо $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$; $B \in \mathcal{B}(W)$, то

$$(\widehat{h} \cdot \mu)(\Phi_B^{\vec{Z}} A) = \sum_{k=1}^{p} c_k \, \mu\big(\Phi_B^{\vec{Z}}(A \cap A_k)\big) = \sum_{k=1}^{p} c_k \, w_{A \cap A_k}(B);$$
$$\sigma_{\vec{Z}}[\widehat{h} \cdot \mu](A) = \sum_{k=1}^{p} c_k \, \sigma_{\vec{Z}}[\mu](A \cap A_k) = \int\limits_A h \, d\sigma_{\vec{Z}}.$$

Нехай тепер h_j и g_j — дві послідовності простих борелівських функцій на $S_{-\varepsilon}$, для яких при кожному j виконуються нерівності: $0 \leqslant h_j \leqslant f \leqslant g_j$; і при цьому обидві послідовності h_j та g_j рівномірно на $S_{-\varepsilon}$ збігаються до f.

Зафіксуємо $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ і $\delta > 0$. Існує $j \in \mathbb{N}$, для якого виконується нерівність

$$\int\limits_A (g_j - h_j) \, d\sigma_{\vec{Z}} < \delta. \tag{3.16}$$

і $r_0 >$ таке, що при $r \in (0, r_0)$ мають місце нерівності:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \, (\widehat{h_j} \cdot \mu)(\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} A) - \int\limits_A h_j \, d\sigma_{\vec{Z}} \right| < \delta; \\ &\left| \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \, (\widehat{g_j} \cdot \mu)(\Phi_{B_r}^{\vec{Z}} A) - \int\limits_A g_j \, d\sigma_{\vec{Z}} \right| < \delta. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Завдяки невід'ємності міри μ справджуються нерівності:

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,(\widehat{h}_j\cdot\mu)(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A)\leqslant\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,(\widehat{f}\cdot\mu)(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A)\leqslant\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,(\widehat{g}_j\cdot\mu)(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A),$$

а тому з (3.16), (3.17), випливає, що при $r\in(0,r_0)$ виконується нерівність

$$\left|\int\limits_A f\,d\sigma_{\vec{Z}}-\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,(\widehat{f}\cdot\mu)(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A)\right|<2\,\delta,$$

що з огляду на довільність $\delta>0$, $\varepsilon>0$ і $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ доводить лему. ■

Теорема 3.2. *Нехай m-форма α замкнена. Тоді $\mu_{\alpha\wedge\beta}=(\mu_\alpha)_{\widetilde{\beta}}$.*

Доведення. Враховуючи незалежність поверхневої міри другого типу від вибору векторних полів, обираємо набір векторних полів $\vec{X}=\{X_1,X_2\ldots,X_{m+n}\}$ відповідно до умов теореми 3.1 (див. приклад 3.2).

Оскільки поля $X_1,X_2\ldots,X_n$ дотикаються до поверхні Σ, то

$$\big|(\alpha\wedge\beta)(\vec{X})\big|=\big|\alpha(\widetilde{\vec{X}})\big|\cdot\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|$$

(тут Y_k — обмеження поля X_k на Σ, $k=1,2\ldots,n$, $\widetilde{\vec{X}}=\{X_{n+1},\ldots,X_{n+m}\}$). Тому згідно теореми 3.1:

$$\mu_{\alpha\wedge\beta}=\frac{1}{\big|(\alpha\wedge\beta)(\vec{X})\big|}\,\sigma_{\vec{X}}=\frac{1}{\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|}\cdot\frac{1}{\big|\alpha(\widetilde{\vec{X}})\big|}\,\sigma_{\vec{Y}}\,[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}].\qquad(3.18)$$

За умовою теореми, диференціальна форма α є замкненою. Тому з попарної комутації векторних полів $X_1,\ldots,X_{m+n}$ і того факту, що $X_1,\ldots,X_n$ дотикаються до Σ, випливає виконання в U тотожної рівності (див., наприклад, [19, с. 88]):

$$X_k\alpha(X_{n+1},\ldots,X_{m+n})=0\qquad(k=1,\ldots,n).$$

Використавши лему 3.3, з (3.18) отримуємо:

$$\mu_{\alpha\wedge\beta} = \frac{1}{\left|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\right|} \cdot \sigma_{\vec{Y}} \left[\frac{1}{\left|\alpha(\vec{X})\right|} \sigma_{\widetilde{\vec{X}}} \right] = (\mu_\alpha)_{\widetilde{\beta}}.$$

Теорему доведено. ∎

Зауваження 3.2. *Умова замкненості диференціальної форми α не є обтяжливою. Будь-яка m-форма ω на $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ є замкненою. А тому замкненою є форма $P_2^*\omega$, де P_2 — проекція $N_1 \times V_1$ на другий множник. Тому "модельні" асоційовані форми α вигляду $(g^{-1})^*(P_2^*\omega)$ є замкненими m-формами на U (тут $\omega = h\,dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$; $\inf_{V_1}\left|h(\vec{t})\right| > 0$).*

3.2 Приклад 1: Скінченновимірний простір

Даний підрозділ присвячено побудові поверхневих мір за схемою, запропонованою в розділі 2, у скінченновимірному евклідовому просторі та дослідженню адекватності отриманих результатів по відношенню до класичних формул площі поверхні. Показується, що вказана побудова призводить до класичної поверхневої міри, що задає площу на поверхні S.

Нехай задано скінченновимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ та параметрично задана поверхня S в ньому. Задача полягає у побудові поверхневої міри ν на S, асоційованої з мірою Лебега λ на $\mathbb{R}^n$. Оскільки $\mathbb{R}^n$ являє собою частковий випадок банахового многовиду з рівномірною структурою (в якості рівномірного атласу можна взяти атлас, що містить єдину карту з тотожним відображенням), використання запропонованого в розділі 2 підходу є можливим.

Через λ_k будемо позначати міру Лебега на $\mathbb{R}^k$. Якщо вектор $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ належить до $\mathbb{R}^m$, то через $\vec{x}_k$ позначатимемо скорочений вектор з перших k координат вектору $\vec{x}$, тобто $\vec{x}_k = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Через π_k позначимо відповідний оператор проектування на перші k координат, $\widetilde{\pi}_k$ — на останні k координат.

Міра на поверхні, яка є графіком функції. Розглянемо спершу випадок поверхні корозмірності 1, що є графіком функції. Нехай $M = \mathbb{R}^m$, $\mu = \lambda_m$ — міра Лебега на $\mathbb{R}^m$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ — функція класу C_b^2, що визначена на деякій обмеженій відкритій підмножині D в R^{m-1} (тобто f є двічі неперервно диференційовною, а функції f' і f'' обмежені на D). Нехай поверхня S задана наступним чином:

$$S = \left\{ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{c} \vec{x}_{m-1} \in D, \\ x_m = f(\vec{x}_{m-1}) \end{array} \right\}.$$

Тоді за класичним підходом площа поверхні S обчислюється за формулою

$$\sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \|\mathbf{grad} f(\vec{y})\|^2}\, d\vec{y}. \tag{3.19}$$

Побудуємо тепер поверхневу міру на S, використовуючи схему, описану в попередньому розділі.

Зафіксуємо деяке $\delta > 0$ і, позначивши через Δ інтервал $(-\delta, \delta)$, розглянемо обмежений ізоморфізм $g\colon D \times \Delta \to \mathbb{R}^m$, заданий формулою

$$g(z_1, \ldots, z_{m-1}, t) = (z_1, \ldots, z_{m-1}, t + f(\vec{z}_{m-1})).$$

Легко побачити, що при вказаній функції g і $U = g(D \times \Delta)$ поверхня S задовольняє умови означення 2.1, тобто є вкладеною в $\mathbb{R}^m$ поверхнею корозмірності 1. При цьому $g^{-1}(z_1, \ldots, z_{m-1}, t) = (z_1, \ldots, z_{m-1}, t - f(\vec{z}_{m-1}))$.

Оскільки dt_m — диференціальна 1-форма на $D \times \Delta$, асоційована з поверхнею $D \times \{\vec{0}\}$ (див. означення 2.2), в якості асоційованої форми поверхні S можна взяти форму $\nu = (g^{-1})^* dt_m$ на U. При цьому

$$\nu(x_1, \ldots, x_m)(\vec{u}) = dt_m\big((g^{-1})'(\vec{x})\vec{u}\big) = -\langle \mathbf{grad} f(\vec{x}_{m-1}), \vec{u}_{m-1} \rangle + u_m.$$

Асоційованою формою для S є також нормована диференціальна форма

$$\omega(\vec{x}) = \frac{\nu(\vec{x})}{\|\nu(\vec{x})\|} = \frac{\nu(\vec{x})}{\sqrt{1 + \|\mathbf{grad} f(\vec{x}_{m-1})\|^2}}.$$

Постійне векторне поле $X(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$, задане на $\mathbb{R}^m$, є обмеженим строго трансверсальним (див. означення 2.3) до S, оскільки $\nu(\vec{x})(X(\vec{x})) = \nu(\vec{x}) \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ при всіх $\vec{x} \in U$ (див. означення 2.3). При цьому $\Phi_t^X(\vec{x}) = (\vec{x}_{m-1}, x_m + t)$ при всіх $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді при $r \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(S)$ маємо:

$$\Phi_{B_r}^X(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{c} \vec{x}_{m-1} \in \pi_{m-1}(A), \\ |x_m - f(\vec{x}_{m-1})| < r \end{array} \right\}$$

Звідси отримуємо рівність

$$\lambda_m(\Phi_{B_r}^X(A)) = \iint\limits_{\widehat{A}} d\vec{z} \int\limits_{f(\vec{z})-r}^{f(\vec{z})+r} dt = 2r\lambda_{m-1}(\widehat{A}),$$

де $\widehat{A} = (\pi_{m-1} \circ g^{-1})(A) = \pi_{m-1}(A)$.

Тоді для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S)$ існує границя (2.18), тобто трійка (S, X, λ_m) є узгодженою в широкому сенсі (див. означення 2.6) і поверхнева міра першого типу на S, породжена векторним полем X, визначається формулою:

$$\sigma_X(A) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda_m\big(\Phi_{B_r}^X(A)\big)}{\lambda_1(B_r)} = \lambda_{m-1}\big(\pi_{m-1}(A)\big), \tag{3.20}$$

тобто міра σ_X є образом міри λ_{m-1} при відображенні $F = g \circ i \colon D \to S$, де $i(x_1, \ldots, x_{m-1}) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)$.

Поверхнева міра другого типу на S, індукована мірою λ_m та асоційованою формою ω визначається як $\sigma_\omega = \dfrac{1}{\big|\omega(X)\big|\Big|_S} \cdot \sigma_X$, тобто

$$\sigma_\omega(A) = \int\limits_A \frac{1}{\big|\omega(X)\big|}\, d\sigma_X.$$

Врахувавши, що $\sigma_X = \lambda_{m-1} \circ (g \circ i)^{-1}$, отримуємо:

$$\sigma_\omega(A) = \int\limits_{\pi_{m-1}(A)} \frac{1}{\Big|\omega(X)\big(g\big(i(z)\big)\big)\Big|}\, \lambda_{m-1}(dz) = \iint\limits_{\pi_{m-1}(A)} \sqrt{1 + \big\|\mathbf{grad} f(\vec{x})\big\|^2}\, d\vec{x}.$$

Взявши тепер в якості A всю поверхню S, отримуємо $\pi_{m-1}(S) = D$, а отже, $\sigma_\omega(A)$ співпадає з класичною площею поверхні, що визначається формулою (3.19).

Зауваження 3.3. *Як доведено у теоремі 2.3 (та зауваженні 2.8), побудована міра σ_ω не залежить від вибору строго трансверсального векторного поля X на $\mathbb{R}^m$. Однак вона залежить від вибору форми ω, асоціййованої з поверхнею S, при цьому поверхневі міри другого типу, побудовані при різних асоціййованих формах, виявляються еквівалентними. Якщо, наприклад, взяти диференціальну форму $\nu = (g^{-1})^* dt_m$, тоді отримана міра σ_ν співпаде з мірою σ_X, що задається формулою* (3.20).

Міра на поверхні, що задана параметрично. Розглянемо тепер випадок поверхні корозмірності k в $\mathbb{R}^m$, що задана параметрично ($k < m$). Як і раніше, $M = \mathbb{R}^m$, $\mu = \lambda_m$ — міра Лебега на $\mathbb{R}^m$. Нехай поверхня S задана відповідно до означення 2.1, тобто $S = g(D \times \{\vec{0}\})$, де $g : D \times V \to U \subset \mathbb{R}^m$ — C_b^2-ізоморфізм, D — обмежена відкрита підмножина в $\mathbb{R}^{m-k}$, V — відкритий окіл нуля в $\mathbb{R}^k$. Через g_D позначатимемо функцію $z = (z_1, \ldots, z_{m-k}) \mapsto g(z_1, \ldots, z_{m-k}, \vec{0}) \in S$, визначену на D, через h — функцію g^{-1}.

Тоді площа поверхні S обчислюється за формулою [27, с. 190]

$$\sigma(S) = \iint\limits_{D} \sqrt{\det\left[g_D{}'(\vec{y})^T g_D{}'(\vec{y})\right]}\, d\vec{y}. \tag{3.21}$$

Перш ніж будувати поверхневу міру на S, асоційовану з мірою λ_m на $\mathbb{R}^m$, доведемо дві допоміжні леми, які стосуються властивостей дійсних матриць.

Лема 3.4. *Нехай невироджена матриця A розміру $n\times n$ має блочний вигляд $A = \begin{pmatrix} B & H \end{pmatrix}$, а її обернена: $A^{-1} = \begin{pmatrix} C^T \\ F^T \end{pmatrix}$, де B і C — матриці $n \times k$, а H і F — $n \times (n-k)$. Тоді*

$$|\det A| \cdot \sqrt{\det F^T F} = \sqrt{\det B^T B}.$$

Доведення. Позначивши через E_n одиничну матрицю розміру $n \times n$ та використавши властивості матриці та її оберненої, отримуємо рівність

$$E_n = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} = A^T A A^{-1} (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} B^T B & B^T H \\ H^T B & H^T H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^T C & C^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} B^T B C^T C + B^T H F^T C & B^T B C^T F + B^T H F^T F \\ H^T B C^T C + H^T H F^T C & H^T B C^T F + H^T H F^T F \end{pmatrix},$$

звідки $B^T B C^T C = E_k - B^T H F^T C$, $B^T B C^T F = -B^T H F^T F$. Тоді:

$$\frac{\det(B^T B)}{(\det A)^2} = \det \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \det\left(A^{-1}(A^{-1})^T\right) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^T C & C^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$
$$= \det \begin{pmatrix} B^T B C^T C & B^T B C^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} E_k - B^T H F^T C & -B^T H F^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$
$$= \det F^T F$$

Передостання рівність отримана додаванням до верхніх k рядків матриці останніх $n-k$ рядків, домножених зліва на $B^T H$. Таким чином, після перенесення $(\det A)^2$ в праву частину і взяття кореня від обох частин виразу, отримуємо шукану тотожність. ■

Лема 3.5. *Нехай B є прямокутною матрицею розміру $n \times k$, $k \leqslant n$. Визначимо оператор P_B, що діє на просторі матриць розміру $n \times k$ наступним чином: $P_B(V) = \det(B^T V)$. Тоді*

$$|||P_B||| \coloneqq \sup_V \frac{P_B(V)}{\prod\limits_{i=1}^{k} \|\vec{v}_i\|} = \sqrt{\det(B^T B)},$$

де $\vec{v}_i$ є вектор-стовпцями матриці V.

Доведення. Представимо B у вигляді $B = UDW^T$, де U та V — ортогональні матриці (розмірів $n \times n$ та $k \times k$ відповідно), а D — невід'ємна "діагональна"розміру $n \times k$ (див. [28, с. 21]). Додатково представимо матрицю D як добуток прямокутної ($n \times k$) одиничної матриці $E = \begin{pmatrix} E_k \\ 0 \end{pmatrix}$ та квадратної діагональної матриці F ($k \times k$). Тоді

$$\det(B^T B) = \det(W F^T E^T U^T U E F W^T) = \det(F^T E^T E F) =$$
$$= \det(F^T F) = \big(\det(F)\big)^2.$$

Для довільної матриці V позначимо $V' = U^T V$, тоді норми вектор-стовпців матриці V' дорівнюють відповідним нормам вектор-стовпців V, а отже

$$\frac{P_B(V)}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\vec{v}_i\|} = \frac{\det(WD^TU^TV)}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\vec{v}_i\|} = \frac{\det(W)\det(F)\det(E^TV')}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\vec{v}'_i\|} = \frac{\det(F)\det(E^TV')}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|\vec{v}'_i\|}.$$

За нерівністю Адамара $\det(E^TV') \leqslant \prod\limits_{i=1}^{k}\|\vec{e}_i\|$, де $\vec{e}_i$ — вектор-рядки матриці E^TV'. При цьому для кожного $i \in \{1,\ldots,k\}$ виконується нерівність $\|\vec{e}_i\| \leqslant \|\vec{v}'_i\|$, звідки випливає, що $|||P_B||| \leqslant \det(F) = \sqrt{\det(B^TB)}$. З іншого боку, для $V = UE$ маємо рівність $P_B(V) = \sqrt{\det(B^TB)}$, що і завершує доведення леми. ■

Побудуємо тепер на S поверхневу міру, асоційовану з мірою λ_m на $\mathbb{R}^m$, за схемою з розділу 2.

Оскільки $(\tilde{\pi}_k)^*(dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k)$ — диференціальна k-форма на $D\times V$, асоційована з поверхнею $D\times\{\vec{0}\}$, диференціальна форма $\nu = (g^{-1})^*(\tilde{\pi}_k)^*(dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k)$ на U є асоційованою для поверхні S. При цьому

$$\nu(\vec{x})(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k) = (dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k)\big(F(\vec{x})^T\vec{v}_1,\ldots,F(\vec{x})^T\vec{v}_k\big),$$

де $F(\vec{x})^T = \tilde{\pi}_k\big((g^{-1})'(\vec{x})\big) = \tilde{\pi}_k\big(h'(\vec{x})\big)$ — матриця $k\times m$. Тоді за лемою 3.5:

$$\|\nu(\vec{x})\| = |||P_{F(\vec{x})}||| = \sqrt{\det\big(F(\vec{x})^TF(\vec{x})\big)}.$$

Оскільки нормування диференціальної форми зберігає її асоційованість з поверхнею, в якості асоційованої форми поверхні S можемо також взяти форму

$$\omega(\vec{x}) = \frac{\nu(\vec{x})}{\|\nu(\vec{x})\|} = \frac{\nu(\vec{x})}{\sqrt{\det\big(F(\vec{x})^TF(\vec{x})\big)}}.$$

Розглянемо набір постійних векторних полів $\vec{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_k\}$ на $\mathbb{R}^m$, де

$Y_i = \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix}$ — одиниця на $(m{-}k{+}i)$-ій позиції. Очевидно, що поля з набору $\vec{Y}$ попарно комутують та утворюють строго трансверсальний до $D \times \{\vec{0}\}$ набір векторних полів (оскільки $\big((\tilde{\pi}_k)^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)\big)\big(\vec{Y}(\vec{x})\big) = \det E_k = 1$). Тому набір $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ векторних полів на U, g-пов'язаних з $\vec{Y}$, є строго трансверсальним до S набором векторних полів, що попарно комутують. При цьому

$$X_i(\vec{x}) = g'(g^{-1}(\vec{x})) \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x_{m-k+i}}(g^{-1}(\vec{x})),$$

$$\omega(\vec{X})(\vec{x}) = \frac{\det(F(\vec{x})^T \vec{X}(\vec{x}))}{\sqrt{\det(F(\vec{x})^T F(\vec{x}))}} = \frac{1}{\sqrt{\det\big(F(\vec{x})^T F(\vec{x})\big)}}. \tag{3.22}$$

Оскільки $\Phi_t^{X_i} = g \circ \Phi_t^{Y_i} \circ g^{-1}$, маємо рівність

$$\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}(\vec{x}) = \left(g \circ \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Y}} \circ g^{-1}\right)(\vec{x}) = g\left(g^{-1}(\vec{x}) + \sum_{i=m-k+1}^{m} t_i \vec{e}_i\right)$$

при всіх $\vec{x} \in U$ і $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$, при яких права частина має зміст. Тоді при $A \in \mathcal{B}(S)$ і $r \in \mathbb{R}$, для якого $B_r \subset V$, отримуємо рівність

$$\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A) = g\left({g_D}^{-1}(A) \times B_r\right).$$

Зробивши заміну змінної $\vec{y} = g^{-1}(\vec{x})$, обчислимо тепер міру Лебега λ_m від множини $\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A)$:

$$\lambda_m\bigl(\Phi^{\vec{X}}_{B_r}(A)\bigr) = \iint\limits_{g(g_D^{-1}(A)\times B_r)} d\vec{x} = \iint\limits_{g_D^{-1}(A)\times B_r} \bigl|\det g'(\vec{y})\bigr|\, d\vec{y} =$$

$$= \int\limits_{B_r}\left(\;\int\limits_{g_D^{-1}(A)} \bigl|\det g'(\vec{x},\vec{t})\bigr|\, d\vec{x}\right) d\vec{t}.$$

Функція g належить до класу $C^2_b(D\times V)$, тому $\det g'(\vec{x},\vec{t})$ неперервний по $\vec{t}$ рівномірно відносно $\vec{x}$. Тоді границя (2.18) існує для кожного $A\in\mathcal{B}(S)$, тобто трійка $(S,\vec{X},\lambda_m)$ є узгодженою в широкому сенсі і відповідна поверхнева міра першого типу на S визначається формулою:

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = \lim_{r\to 0}\frac{\lambda_m\bigl(\Phi^{\vec{X}}_{B_r}(A)\bigr)}{\lambda_k(B_r)} = \int\limits_{g_D^{-1}(A)} \bigl|\det g'(\vec{x},\vec{0})\bigr|\, d\vec{x},$$

тобто міра $\sigma_{\vec{X}}$ є образом міри $\bigl|\det g'(\cdot,\vec{0})\bigr|\cdot\lambda_{m-k}$ при відображенні $g_D\colon D\to S$.

Врахувавши рівність (3.5), переходимо до поверхневої міри другого типу, індукованої асоційованою формою ω:

$$\sigma_\omega(A) = \int\limits_A \frac{1}{|\omega(X)|}\, d\sigma_{\vec{X}} = \int\limits_A \sqrt{\det\bigl(F(\vec{x})^T F(\vec{x})\bigr)}\, d\sigma_{\vec{X}},$$

де $F(\vec{x})^T = \tilde{\pi}_k\bigl(h'(\vec{x})\bigr)$.

Зафіксуємо тепер довільне $x\in D$ і представимо матриці $g'(\vec{x},\vec{0})$ та $h'\bigl(g(\vec{x},\vec{0})\bigr)$ у блочному вигляді:

$$g'(\vec{x},\vec{0}) = \begin{pmatrix} B_{\vec{x}} & H_{\vec{x}}\end{pmatrix}, \qquad h'\bigl(g(\vec{x},\vec{0})\bigr) = \begin{pmatrix} C_{\vec{x}}^{\,T} \\ F_{\vec{x}}^{\,T}\end{pmatrix}$$

де B і C — матриці $m\times(m-k)$, H і F — $m\times k$. Тоді $F\bigl(g(\vec{x},\vec{0})\bigr) =$

$= \tilde{\pi}_k\Big(h'\big(g(\vec{x},\vec{0})\big)\Big)^T = F_{\vec{x}}$, $B_{\vec{x}} = (g_D)'(\vec{x})$ і крім того, за лемою 3.4:

$$\big|\det g'(\vec{x},\vec{0})\big| \cdot \sqrt{\det {F_{\vec{x}}}^T F_{\vec{x}}} = \sqrt{\det {B_{\vec{x}}}^T B_{\vec{x}}}$$

Врахувавши, що $\sigma_{\vec{X}} = \Big(\big|\det g'(\cdot,\vec{0})\big| \cdot \lambda_{m-k}\Big) \circ {g_D}^{-1}$, отримуємо:

$$\sigma_\omega(A) = \iint\limits_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det({F_{\vec{x}}}^T F_{\vec{x}})} \cdot \big|\det g'(\vec{x},\vec{0})\big|\, d\vec{x} = \iint\limits_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det({B_{\vec{x}}}^T B_{\vec{x}})}\, d\vec{x} =$$
$$= \iint\limits_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det[{g_D}'(\vec{x})^T {g_D}'(\vec{x})]}\, d\vec{x}.$$

Взявши тепер в якості A всю поверхню S, отримуємо $g_D^{-1}(A)(S) = D$, а отже, $\sigma_\omega(S)$ співпадає з класичною площею поверхні, визначеною у формулі (3.21).

3.3 Приклад 2: Ріманів многовид

У даному підрозділі адекватність конструкції поверхневих мір, запропонованої в розділі 2, підтверджується на прикладі ріманового многовиду. Якщо задано ріманів многовид M з рівномірною структурою і вкладена в його компактну підмножину $\overline{U}$ замкнена поверхня S, тоді S також являє собою ріманів многовид (відповідний ріманів тензор індукується вкладенням). Таким чином, на S можна коректно визначити ріманову міру об'єму $\widetilde{V}$. З іншого боку, за допомогою метричного тензору T на M можна задати міру об'єму V на многовиді M, і використовуючи підхід, описаний в розділі 2, побудувати на S поверхневу міру $\widehat{V}$, асоційовану з V. Як показується далі, вказані два підходи є еквівалентними.

Нехай M є дійсним скінченновимірним многовидом класу C^2 з модельним простором $\mathbb{R}^m$. Вважаємо, що M зв'язний та наділений рівномірною структурою, $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — рівномірний атлас. Вважаємо також, що многовид M є рімановим, тобто на M задано тензорне поле T типу (2,0) класу C^2 таке, що для кожної точки $p \in M$ білінійний функціонал $T(p)$ на T_pM є симетричним і додатно визначеним. Таким чином на T_pM визначено скалярний добуток $\langle u, v\rangle_T = T(p)(u, v)$ і відповідну норму:

$$\|u\|_T = T(p)(u, u).$$

Нехай $K = \overline{U}$ — компактна підмножина в M. Тоді на K визначено міру об'єму V:

$$V(G) = \sum_i \int\limits_{\varphi_{\alpha_i}(G_i)} \sqrt{\det\bigl(T_{\varphi_{\alpha_i}}(\vec{x})\bigr)}\, dx^1 \dots dx^m, \tag{3.23}$$

де $G = \bigcup\limits_i G_i$ — таке розбиття множини $G \in \mathcal{B}(K)$ на скінченну кількість підмножин G_i, що попарно не перетинаються, при якому кожна $G_i \subset U_{\alpha_i}$ для деякого α_i. Легко побачити, що значення $V(G)$ скінченне ($V(G)$ рівномірно обмежена) і не залежить від способу розбиття, а тому формула (3.23) коректно задає скінченну міру.

Нехай вкладена в M замкнена поверхня S задана відповідно до означення 2.1, тобто $S = g\bigl(N \times \{\vec{0}\}\bigr)$, де $g\colon N \times D \to U \subset M$ — C_b^2-ізоморфізм, N — многовид з обмеженою структурою, моделлю якого є $\mathbb{R}^{m-k}$, D — відкритий окіл нуля в $\mathbb{R}^k$.

Позначатимемо через $\pi\colon N \times D \to N$ проекцію на першу координату, через $P\colon N \times D \to D$ — на другу. Тоді для кожної точки вкладеної поверхні S можна розглянути карту

$$(\widetilde{\psi}, \widetilde{W}) = \Bigl(\psi \circ \pi \circ g^{-1}, g\bigl(W \times \{\vec{0}\}\bigr)\Bigr),$$

де (ψ, W) — карта на N в точці $(\pi \circ g^{-1})(x)$, і таким чином S також наділена обмеженою структурою. При цьому відповідна карта

$$(\widehat{\psi}, \widehat{W}) = \bigl((\psi \times id) \circ g^{-1}, g(W \times D)\bigr) \tag{3.24}$$

на M узгоджується з заданою обмеженою структурою.

Зауваження 3.4. *Для атласу $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}$ на N можна побудувати підатлас $\{(\psi_\alpha, G_\alpha)\}$ таким чином, щоб кожна множина G_α лежала в W_α разом з деяким околом і при цьому $\psi_\alpha(G_\alpha) = B_{\varepsilon_\alpha}$. Тому можемо вважати, що кожна функція ψ визначена в деякому околі множини W, а образами W є кулі в $\mathbb{R}^k$.*

Поверхнева міра, асоційована з мірою об'єму на многовиді. Побудуємо на S поверхневу міру, використовуючи описаний в попередньому розділі підхід. Оскільки $P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ — диференціальна k-форма на $N \times D$, асоційована з поверхнею $N \times \{\vec{0}\}$, в якості асоційованої форми поверхні S можна взяти форму $\nu = (g^{-1})^* P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ на U. При цьому для $x \in U_\alpha \cap U$ і $u_1, \ldots, u_k \in T_x M$ маємо:

$$\nu(x)(u_1, \ldots, u_k) = (dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)\big(T_x(P \circ g^{-1})u_1, \ldots, T_x(P \circ g^{-1})u_k\big) =$$
$$= \det\big((P \circ g^{-1} \circ {\varphi_\alpha}^{-1})'(u_1)_\alpha, \ldots, (P \circ g^{-1} \circ {\varphi_\alpha}^{-1})'(u_k)_\alpha\big),$$

де $(u_i)_\alpha \in \mathbb{R}^m$ – представлення дотичного вектора u_i в карті φ_α.

Для карти $(\widehat{\psi}, \widehat{W})$ (див. (3.24)) отримуємо:

$$\nu(x)(u_1, \ldots, u_k) = \det(P_2(u_1)_{\hat{\psi}}, \ldots, P_2(u_k)_{\hat{\psi}}), \tag{3.25}$$

де $P_2 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекція на останні k координат.

Зафіксуємо деяку точку $x = g(y, \vec{0}) \in S$. Представлення тензора $T(x)$ у карті $\widehat{\psi}$ має вигляд симетричної додатно визначеної блочної матриці:

$$T_{\widehat{\psi}}\big(\widehat{\psi}(x)\big) = T_{\widehat{\psi}}\big(\psi(y), \vec{0}\big) = T_x = \begin{pmatrix} A_x & F_x \\ F_x^T & C_x \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

де A_x та C_x — симетричні матриці $n-k \times n-k$ та $k \times k$ відповідно, F_x — матриця $n-k \times k$.

Лема 3.6. *Для* $x \in M$ *введемо позначення*

$$\|\nu(x)\|_T = \sup_{u_1,\ldots,u_k \in T_xM} \frac{|\nu(x)(u_1,\ldots,u_k)|}{\prod\limits_{i=1}^{k} \|u_i\|_T}.$$

Тоді в умовах представлення (3.26)*:* $\|\nu(x)\|_T = \dfrac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det T_x}}$.

Доведення. Оскільки матриця T_x є симетричною додатно визначеною, для неї можна застосувати розклад Холецького: $T_x = L_x L_x^T$, де $L_x = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ — нижня трикутна матриця з $K_x K_x^T = A_x$. І нехай ${L_x}^{-1}$ має блочний вигляд: ${L_x}^{-1} = \begin{pmatrix} \ldots & B_x \\ \ldots & H_x \end{pmatrix}$, де $K_x B_x = 0$. При цьому за лемою 3.4 маємо рівність:

$$|\det L| \cdot \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} {B_x}^T & {H_x}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ H_x \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} K_x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {K_x}^T & 0 \end{pmatrix}\right)} =$$
$$= \sqrt{\det\left(K_x K_x^T\right)} = \sqrt{\det A_x}.$$

Тоді:

$$\|\nu(x)\|_T = \sup_{u_1,\ldots,u_k \in T_xM} \frac{|\nu(x)(u_1,\ldots,u_k)|}{\prod\limits_{i=1}^{k} \|u_i\|_T} =$$
$$= \begin{bmatrix} \text{карта } \widehat{\psi} \\ \text{рівн. (3.25)} \end{bmatrix} = \sup_{u_1,\ldots,u_k \in T_xM} \frac{\left|\det\left(P_2(u_1)_{\widehat{\psi}},\ldots,P_2(u_k)_{\widehat{\psi}}\right)\right|}{\prod\limits_{i=1}^{k} \sqrt{\left\langle L_x^T(u_i)_{\widehat{\psi}}, L_x^T(u_i)_{\widehat{\psi}}\right\rangle}} =$$
$$= \begin{bmatrix} v_i = {L_x}^T(u_i)_{\widehat{\psi}} \\ V = [v_1 \ldots v_k] \end{bmatrix} = \sup_{v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^m} \frac{\left|\det\left(\begin{pmatrix} {B_x}^T & {H_x}^T \end{pmatrix} V\right)\right|}{\prod\limits_{i=1}^{k} \|v_i\|}.$$

За лемою 3.5 маємо:

$$\|\nu(x)\|_T = \sup_{v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^m} \frac{\left|\det\left(\begin{pmatrix} {B_x}^T & {H_x}^T \end{pmatrix} V\right)\right|}{\prod\limits_{i=1}^{k}\|v_i\|} =$$

$$= \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} {B_x}^T & {H_x}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_x \\ H_x \end{pmatrix}\right)} = \frac{\sqrt{\det A_x}}{|\det L|} = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det T_x}}.$$

Лему доведено. ■

Оскільки нормування диференціальної форми зберігає її асоційованість з поверхнею, в якості асоційованої форми поверхні S можемо також взяти форму:

$$\omega(\vec{x}) = \frac{\nu(\vec{x})}{\|\nu(\vec{x})\|_T} = \frac{\sqrt{\det T_x}}{\sqrt{\det A_x}} \cdot \nu(\vec{x})$$

Розглянемо набір векторних полів $\vec{Y} = \{\vec{Y_1}, \ldots, \vec{Y_k}\}$ на $N \times D$:

$$Y_i(z) = \begin{pmatrix} \vec{0}^{\,T}_{T_zN} & \vec{0}^{\,T}_{i-1} & 1 & \vec{0}^{\,T}_{k-i} \end{pmatrix}^T \in T_zN \times \mathbb{R}^k$$

— одиниця на i-ій позиції в $\mathbb{R}^k$. Очевидно, що поля з набору $\vec{Y}$ попарно комутують та утворюють строго трансверсальний до S набір векторних полів (оскільки $\big(P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)\big)\big(\vec{X}(z)\big) = \det E_k = 1$). Тому набір $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ векторних полів на U, g-зв'язаних з $\vec{Y}$, є строго трансверсальним до S набором векторних полів, що попарно комутують. При цьому представлення X_i у карті $(\widehat{\psi}, \widehat{W})$ (див. (3.24)) має вигляд:

$$(X_i)_{\widehat{\psi}}\big(\widehat{\psi}(x)\big) = \left(\widehat{\psi} \circ g \circ (\psi \times id)^{-1}\right)' (Y_i)_{\psi\times id}\left(g^{-1}(x)\right) = \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix},$$

а тому:

$$\nu(\vec{x})(\vec{X}) = \nu_{\widehat{\psi}}\big(\widehat{\psi}(x)\big)(\vec{X}_{\widehat{\psi}}) = \det(E_k) = 1.$$

Оскільки $\Phi_t^{X_i} = g \circ \Phi_t^{Y_i} \circ g^{-1}$, то для всіх $x \in S$ і $t \in D$ маємо рівність:

$$\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}(\vec{x}) = (g \circ \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Y}} \circ g^{-1})(\vec{x}) = g\left((\pi \circ g^{-1})(\vec{x}) \times \{\vec{t}\}\right).$$

Тоді при $A \in \mathcal{B}(S)$ і $r \in \mathbb{R}$, для якого $B_r \subset D$, отримуємо рівність

$$\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A) = g((\pi \circ g^{-1})(A) \times B_r).$$

Візьмемо тепер борелівську підмножину $G \subset S$, що разом з деяким околом лежить в межах однієї карти $(\widehat{\psi}, \widehat{W})$ на M. Тоді при малих r:

$$V(\Phi_{B_r}^{\vec{X}} G) = \int\limits_{\widehat{\psi}(\Phi_{B_r}^{\vec{X}} G)} \sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{x})\big)}\, dx^1 \dots dx^m =$$
$$= \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)\times B_r} \sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{x})\big)}\, dx^1 \dots dx^m = \int\limits_{B_r} \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \sqrt{\det\left(T_{\widehat{\psi}}(\vec{z}, \vec{t}\,)\right)}\, d\vec{z}\, d\vec{t}.$$

Врахувавши гладкість і обмеженість тензорного поля $T_{\widehat{\psi}}$ (на компактній множині $\psi(\overline{W}) \times \overline{B}_R$, див. зауваження 3.4), знаходимо границю (2.18) для міри V:

$$\lim_{r\to 0} \frac{V\big(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(G)\big)}{\lambda_k(B_r)} = \lim_{r\to 0} \int\limits_{B_r} \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{z}, \vec{t}\,)\big)}\, d\vec{z}\, d\vec{t} =$$
$$= \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{z}, \vec{0}\,)\big)}\, d\vec{z} = \left(\left(\sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\cdot, \vec{0}\,)\big)} \cdot \lambda_{m-k}\right) \circ \widetilde{\psi}\right)(G).$$

Враховуючи компактність $\overline{U}$ і зауваження 3.4, кожну множину $G \in \mathcal{B}(S)$ можемо представити у вигляді скінченного об'єднання підмножин вказаного вигляду. А отже, поверхнева міра $\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{X}}[V]$ визначена на $\mathcal{B}(S)$ коректно і є образом міри $\sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{z}, \vec{0}\,)\big)} \cdot \lambda_{m-k}$ при відображенні $\widetilde{\psi}^{-1} \colon \psi(W) \to S$.

Переходимо тепер до поверхневої міри другого типу, індукованої асоційованою формою ω:

$$\sigma_\omega(G) = \left(\frac{1}{\left|\omega(\vec{X})\right|\Big|_S} \cdot \sigma_{\vec{X}}\right)(G) = \int\limits_G \frac{1}{\left|\omega(\vec{X})\right|\Big|_S}\, d\sigma_{\vec{X}} = \\ = \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \left\|\nu\big(\widetilde{\psi}^{-1}(\vec{z})\big)\right\|_T \cdot \sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{z},\vec{0})\big)}\, d\vec{z}.$$

За лемою для $x = g\big(\psi^{-1}(\vec{z}),\vec{0}\big) = \widetilde{\psi}^{-1}(\vec{z})$ маємо рівність

$$\left\|\nu\big(\widetilde{\psi}^{-1}(\vec{z})\big)\right\|_T = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det\big(T_{\widehat{\psi}}(\vec{z},\vec{0})\big)}}.$$

Тому для кожного $G \in \mathcal{B}(S)$:

$$\widehat{V}(G) := \sigma_\omega(G) = \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \sqrt{\det A_{\widetilde{\psi}^{-1}(\vec{z})}}\, d\vec{z} = \int\limits_G \sqrt{\det A_x}\, dx.$$

Поверхнева міра об'єму, задана індукованим на поверхні тензором. Вкладення $i\colon S \to M$ поверхні S у многовид M індукує на S ріманів тензор $\widetilde{T} = i^*T$, і таким чином поверхня S також являє собою ріманів многовид. Тому на S визначено ріманову міру об'єму $\widetilde{V}$ аналогічно формулі (3.23):

$$\widetilde{V}(G) = \sum_i \int\limits_{\varphi_{\alpha_i}(G_i)} \sqrt{\det\big(\widetilde{T}_{\varphi_{\alpha_i}}(\vec{x})\big)}\, dx^1 \dots dx^m,$$

де $G = \bigcup\limits_i G_i$ — таке розбиття множини $G \in \mathcal{B}(M)$ на скінченну кількість підмножин G_i, що попарно не перетинаються, при якому кожна G_i лежить в області визначення деякої карти $(U_{\alpha_i}, \varphi_{\alpha_i})$ многовиду S.

Зафіксуємо карту (ψ, W) на N і відповідні карти $(\widetilde{\psi}, \widetilde{W})$ та $(\widehat{\psi}, \widehat{W})$ на S та M. Для $x \in \widetilde{W} \subset S$ представлення тензора $\widetilde{T}$ у карті $(\widetilde{\psi}, \widetilde{W})$ має вигляд

$\widetilde{T}_{\widetilde{\psi}}(\vec{x}) = A_x$ (в позначеннях представлення (3.26)), оскільки:

$$\widetilde{T}_{\widetilde{\psi}}(\vec{x})(\vec{u},\vec{v}) = T_{\widehat{\psi}}(\vec{x})\Big((\widehat{\psi}\circ\widetilde{\psi}^{-1})'\big(\widetilde{\psi}(x)\big)(\vec{u}), (\widehat{\psi}\circ\widetilde{\psi}^{-1})'\big(\widetilde{\psi}(x)\big)(\vec{v})\Big) =$$
$$= T_{\widehat{\psi}}(\vec{x})\left(\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{0}\end{pmatrix}\right).$$

Таким чином для підмножини $G \in \mathcal{B}(S)$, $G \subset \widetilde{W}$ маємо:

$$\widetilde{V}(G) = \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \sqrt{\det\big(\widetilde{T}_{\widetilde{\psi}}(\vec{x})\big)}\, d\vec{x} = \int\limits_{\widetilde{\psi}(G)} \sqrt{\det A_{\widetilde{\psi}^{-1}(\vec{x})}}\, d\vec{x} = \widehat{V}(G).$$

Врахувавши компактність S, отримуємо, що індукована міра $\widetilde{V}$ співпадає з побудованою асоційованою мірою $\widehat{V}$.

Отже, отримано поверхневі міри першого та другого типу, асоційовані з рімановою мірою об'єму на поверхні, вкладеній у ріманів многовид з рівномірною структурою. Показано, що отримана міра співпадає з мірою об'єму поверхні, що задається індукованим тензором. Таким чином, обґрунтовано адекватність використання запропонованого підходу до побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах.

3.4 Висновки за розділом

У даному розділі досліджене питання узгодженості конструкції поверхневих мір, запропонової в попередньому розділі, при транзитивному вкладенні двох поверхонь. Доведено, що при подвійному вкладенні поверхні S у многовид M (S вкладена у Σ, що в свою чергу вкладена у M) конструкція є транзитивною, тобто безпосередня побудова поверхневої міри на S при розгляді її вкладення в M призводить до того ж результату, що і двоетапна побудова через поверхневу міру на Σ.

Показано, що запропонований альтернативний підхід до побудови поверхневої міри на поверхні в $\mathbb{R}^m$ та на поверхні, вкладеній у ріманів многовид, узгоджується з класичними результатами.

Основні результати розділу представлені у роботах [15], [33], [35].

РОЗДІЛ 4
ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ БОРЕЛІВСЬКИХ МІР НА БАНАХОВИХ МНОГОВИДАХ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

У даному розділі розглядається поняття диференційовності борелівських мір відповідно до робіт [5, 6] В. І. Богачова, що присвячені диференційовності мір вздовж сталих напрямків. Розділ присвячено узагальненню поняття диференційовності мір на випадок їх зсувів вздовж векторних полів та дослідженню його властивостей, зокрема, доведенню низки результатів, що узагальнюють відповідні результати, що стосуються диференційовності вздовж сталих напрямків. Як і раньше, розглядаються борелівські міри на банахових многовидах з рівномірною структурою. Основним результатом є узагальнення критерію слабкої диференційовності (теорема 4.4), опубліковане в роботі [34].

Даний розділ має наступну структуру. У підрозділі 4.1 наводяться основні означення та необхідні теоретичні відомості. Крім того доведено дві корисні леми, що визначають властивості потоків обмежених векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. У підрозділах 4.2 та 4.3 досліджено властивості сильної та слабкої диференційовності відповідно. І нарешті, у підрозділі 4.4 доведено згаданий вище критерій. Доведення надається для двох випадків: більш простий випадок банахового простору та узагальнення на банахів многовид з рівномірною структурою.

4.1 Поняття диференційовності борелівських мір уздовж обмежених векторних полів

Нехай M — банахів E-многовид з рівномірною структурою класу C^2 (дійсний, зв'язний). Далі вважатимемо, що $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ — рівномірний атлас на M, тоді M є повним метричним простором за метрикою ρ, що породжена атласом Ω.

Банахів многовид M з рівномірною структурою допускає неперервне розбиття одиниці. У випадку, коли простір E гільбертів, M допускає розбиття одиниці класу C^2 ([31, с. 49]).

4.1.1 Властивості потоку обмеженого векторного поля Нехай на банаховому многовиді M з рівномірним атласом $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ задане обмежене векторне поле X класу C^1_b.

Потік $\Phi(t,x) = \Phi_x(t) = \Phi_t(x)$ обмеженого векторного поля X за результатами [31, с. 96] визначений глобально на $\mathbb{R} \times M$. Крім того, за результатами [31, с. 97] потік Φ є морфізмом класу C^1 многовиду $\mathbb{R} \times M$ в M. Для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ визначимо локальний потік $\Phi^\alpha(t,y) = \varphi \circ \Phi\big(t, \varphi^{-1}(y)\big)$ на такій підмножині $\mathbb{R} \times \varphi(U_\alpha)$, де права частина має сенс. При цьому для кожного $y \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ потік Φ^α_y визначений на відкритому проміжку $\Delta_y \subset \mathbb{R}$, що містить точку 0, і на цьому проміжку справедлива рівність $\dfrac{d}{dt}\Phi^\alpha_y(t) = X_\alpha\big(\Phi^\alpha_y(t)\big)$.

Функцію $f \in C_b(M)$ назвемо диференційовною вздовж векторного поля X, якщо для кожного $x \in M$ функція $f \circ \Phi_x$ є диференційовною на $\mathbb{R}$ (або в нулі, що те ж саме). Будемо позначати $\partial_X f(x) = (f \circ \Phi_x)'(0)$.

Доведемо дві допоміжні леми, що визначають властивості потоку обмеженого векторного поля на многовиді з рівномірною структурою.

Лема 4.1. *Нехай M — банахів многовид з рівномірною структурою, X — векторне поле класу C^1_b на M з потоком Φ. Тоді існує таке подрібнення $\{V_\alpha\}$ покриття $\{U_\alpha\}$, що $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ для кожного α. Крім того, існують такі константи $a, b > 0$, що при кожному α потік Φ^α визначений на $(-b,b) \times B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ і набуває значень в $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.*

Доведення. Нехай r — константа з означення рівномірного атласу для Ω. Для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ розглянемо множини:

$$\widetilde{U}_\alpha = \Big\{x \in U_\alpha \mid \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)\Big\}, \qquad V_\alpha = \widetilde{U}^0_\alpha \text{ — внутрішність } \widetilde{U}_\alpha.$$

Тоді $\{V_\alpha\}$ є відкритим покриттям M. Дійсно, для кожної точки $x \in M$ існує карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ така, що

$$\overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset B^E_r\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

тому $x \in \widetilde{U}_\alpha$. Крім того, множина $\varphi_\alpha^{-1}\Big(B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big)\Big)$ є відкритою підмножиною U_α в M і містить точку x, тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B^M_\varepsilon(x) \subset$ $\subset \varphi_\alpha^{-1}\Big(B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big)\Big)$. Тоді для кожного $y \in B^M_\varepsilon(x)$ виконується включення $\varphi_\alpha(y) \in B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big)$ і $\overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(y)\big) \subset B^E_r\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, звідки випливає, що $B^M_\varepsilon(x) \subset \widetilde{U}_\alpha$. Отже, x — внутрішня точка $\widetilde{U}_\alpha$, а тому належить до V_α.

Доведемо тепер для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ включення $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Легко побачити, що замикання множини $\varphi_\alpha(\widetilde{U}_\alpha) = \big\{y \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \mid \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}(y) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)\big\}$ лежить в $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Тоді $\varphi_\alpha^{-1}\big(\overline{\varphi_\alpha(\widetilde{U}_\alpha)}\big)$ — замкнена підмножина U_α, що містить V_α. Тому $\overline{V}_\alpha \subset \varphi_\alpha^{-1}\big(\overline{\varphi_\alpha(\widetilde{U}_\alpha)}\big) \subset U_\alpha$.

Нехай $a = \min\left\{\dfrac{r}{6}, \dfrac{1}{2}\right\}$. Зафіксуємо $x_0 \in \varphi_\alpha(V_\alpha)$ і розглянемо множину $U =$ $= B^E_{\frac{r}{2}}(x_0) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Нехай L — константа з означення обмеженого векторного поля для поля X. Тоді за теоремою про середнє [31, с. 22] векторне поле X_α задовольняє на U умову Ліпшиця з константою L і за [31, с. 82] при довільному додатному $b < a/\big(\max\{L, 1\}\big)^2$ потік Φ^α векторного поля X_α визначений на $(-b, b) \times B^E_a(x_0)$ і набуває значень в $B^E_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Зафіксуємо довільне таке b (незалежно від карти). Тоді при кожному α потік Φ^α визначено на $(-b, b) \times B^E_a(x_0)$ для кожного $x_0 \in \varphi_\alpha(V_\alpha)$, тобто він визначений на $(-b, b) \times B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ і набуває значень в $B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big) \subset \varphi(U_\alpha)$.

Лему доведено. ■

Лема 4.2. *Для кожного $t \in \mathbb{R}$ функція Φ_t є C^1_b-ізоморфізмом M в M, тобто для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує така константа $A(t) > 0$, що для будь-якої точки $x \in M$ нерівність*

$$\Big\|\big(\varphi \circ \Phi_t \circ \psi^{-1}\big)'\big(\psi(x)\big)\Big\| \leqslant A(t)$$

виконується для кожної пари карт $(U,\varphi),(V,\psi)\in\Omega$*, де* $x\in V$*,* $\Phi_t(x)\in U$*.*

Доведення.

Крок 1: Виберемо константи a і b, існування яких гарантовано лемою 4.1, і зафіксуємо деяке α. Тоді для кожної пари точок $x,y\in B_a^E\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ можемо використати пропозицію [31, с. 83] для функцій $f_1(t)=\Phi^\alpha(t,x)$ та $f_2(t)=\Phi^\alpha(t,y)$ на $(-b,b)$ при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$. Таким чином, для кожної карти і кожного $t\in(-b,b)$ для всіх $x,y\in B_a^E\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ отримуємо нерівність

$$\big\|\Phi^\alpha(t,x)-\Phi^\alpha(t,y)\big\|\leqslant\|x-y\|\,e^{L|t|}.$$

Крок 2: Розглянемо деяке $|t|<b$ і зафіксуємо точку $x\in M$. Тоді існує така карта $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, що $x\in V_\alpha$, а $\Phi_t(x)\in U_\alpha$. При $h\in B_a^E(0)$ маємо, що $\varphi_\alpha(x)+h\in$ $\in B_a^E\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$, а тому за доведеним у кроці 1:

$$\Big\|\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)+h\big)-\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)\big)\Big\|\leqslant\|h\|\,e^{L|t|}.$$

Врахувавши існування похідної функції $\varphi_\alpha\circ\Phi_t\circ\varphi_\alpha^{-1}=\Phi_t^\alpha$ в точці $\varphi_\alpha(x)$, одержуємо:

$$\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)+h\big)-\Phi_t^\alpha\big(\varphi_\alpha(x)\big)=(\Phi_t^\alpha)'\,\big(\varphi_\alpha(x)\big)h+\delta\big(\varphi_\alpha(x),h\big),$$

де $\delta\big(\varphi_\alpha(x),h\big)=o\big(\|h\|\big)$.

Візьмемо таку послідовність $\varepsilon_n<a$, що для кожного n з нерівності $\|h\|\leqslant$ $\leqslant\varepsilon_n$ випливає нерівність $\Big\|\delta\big(\varphi(x),h\big)\Big\|\leqslant\dfrac{1}{n}\|h\|$. При цьому для кожного $n\in\mathbb{N}$ отримуємо нерівність:

$$\Big\|(\Phi_t^\alpha)'\,\big(\varphi_\alpha(x)\big)\Big\|=\sup_{\|h\|\leqslant\varepsilon_n}\frac{\Big\|(\Phi_t^\alpha)'\,\big(\varphi_\alpha(x)\big)\,h\Big\|}{\|h\|}\leqslant\sup_{\|h\|\leqslant\varepsilon_n}\frac{\|h\|\,e^{L|t|}+\dfrac{1}{n}\|h\|}{\|h\|}\leqslant e^{L|t|}+\frac{1}{n}.$$

Звідси випливає, що при $|t|<b$ для кожного $x\in M$ для карти $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, де

$x \in V_\alpha$, виконується нерівність $\left\| \left(\varphi_\alpha \circ \Phi_t \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)' \left(\varphi_\alpha(x)\right) \right\| \leqslant e^{L|t|}$.

Крок 3: Візьмемо довільне $t \in \mathbb{R}$ і зафіксуємо точку $x \in M$. Запишемо t у вигляді суми $m \cdot \widehat{b} + \delta$, де $m \in \mathbb{N}$, $|\widehat{b}| < b$, $|\delta| < b$ і числа $\widehat{b}$ та δ одного знаку з t. Розглянемо такий набір карт (U_0, φ_0),$(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_m, \varphi_m)$, що $x \in V_0$, $\Phi_\delta(x) \in$ $\in V_1$, $\Phi_{\delta+\widehat{b}}(x) \in V_2$,..., $\Phi_{\delta+(m-1)\widehat{b}}(x) \in V_m$. Тоді, оскільки $\widehat{b}, \delta < b$, маємо також включення $\Phi_\delta(x) \in U_0$, $\Phi_{\delta+\widehat{b}}(x) \in U_1$, $\Phi_{\delta+2\widehat{b}}(x) \in U_2$,..., $\Phi_{\delta+m\widehat{b}}(x) \in U_m$. Тому значення функції $\varphi_m \circ \Phi_t \circ \varphi_0^{-1}$ в точці $\varphi_0(x)$ можна записати так:

$$\left(\varphi_m \circ \Phi_t \circ \varphi_0^{-1}\right)\left(\varphi_0(x)\right) = \big((\varphi_m \circ \Phi_{\widehat{b}} \circ \varphi_m^{-1}) \circ (\varphi_m \circ \varphi_{m-1}^{-1}) \circ (\varphi_{m-1} \circ \Phi_{\widehat{b}} \circ \varphi_{m-1}^{-1}) \circ$$
$$\circ \left(\varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2}^{-1}\right) \circ \ldots \circ \left(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}\right) \circ \left(\varphi_0 \circ \Phi_\delta \circ \varphi_0^{-1}\right)\big)\left(\varphi_0(x)\right).$$

Звідси, використовуючи обмеженість атласу Ω і результати кроку 2, отримуємо нерівність

$$\left\| \left(\varphi_m \circ \Phi_t \circ \varphi_0^{-1}\right)' \left(\varphi_0(x)\right) \right\| \leqslant e^{L|\widehat{b}|} \cdot K \cdot e^{L|\widehat{b}|} \cdot K \cdot \ldots \cdot e^{L|\widehat{b}|} \cdot K \cdot e^{L|\delta|} = e^{L|t|} K^m.$$

Візьмемо тепер довільну пару карт $(U, \varphi), (V, \psi) \in \Omega$, де $x \in V$, $\Phi_t(x) \in U$, і знову використавши обмеженість атласу, отримуємо нерівність

$$\left\| \left(\varphi \circ \Phi_t \circ \psi^{-1}\right)' \left(\psi(x)\right) \right\| \leqslant e^{L|t|} K^{m+2},$$

що завершує доведення, оскільки права частина залежить лише від t. ■

4.1.2 Неперервність та диференційовність мір уздовж обмежених векторних полів Нехай на $\mathcal{B}(M)$ задана міра μ та векторне поле X класу $C_b^1(M)$. Наступні означення наводяться відповідно до глави 3 книги [5] (див. також підрозділ 1.3) з природним узагальненням на випадок зсувів вздовж векторних полів.

Оскільки для кожного $t \in \mathbb{R}$ відображення Φ_t є борелівським, можемо розглянути міру μ_t, що є образом міри μ при відображенні Φ_{-t}:

$$\mu_t(A) = \mu\big(\Phi_t(A)\big), \qquad \forall A \in \mathcal{B}(M).$$

Міру μ_t будемо називати зсувом міри μ на t вздовж векторного поля X. При цьому для всіх функцій $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ виконується така рівність:

$$(f \cdot \mu)_t = (f \circ \Phi_t) \cdot \mu_t.$$

Зрозуміло, що в частковому випадку сталого векторного поля $X(x) = h$ на банаховому просторі визначені вище міри μ_t збігаються зі зсувами міри μ уздовж напрямку h.

Означення 4.1. *Борелівська μ називається неперервною вздовж векторного поля X, якщо*

$$\lim_{t\to 0} \|\mu_t - \mu\| = 0.$$

Повністю аналогічно випадку диференійовності за напрямком показується, що всяка міра, що є абсолютно неперервною відносно неперервної вздовж векторного поля X міри, є також неперервною уздовж X ([5, с. 98–99]). Крім того, доводиться, що неперервність міри μ вздовж векторного поля X еквівалентна тому, що для кожної множини $A \in \mathcal{B}(M)$ функція $t \mapsto \mu_t(A)$ є неперервною на $\mathbb{R}$ (достатньо неперервності в нулі).

Означення 4.2. *Міра μ називається диференційовною за Фоміним (в сильному сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{B}(M)$ функція $t \mapsto \mu_t(A)$ є диференційовною на $\mathbb{R}$.*

Сильна диференційовність міри μ еквівалентна тому, що для кожної множини $\mathcal{B}(M)$ існує скінченна границя

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mu_t(A) - \mu(A)}{t},$$

яку будемо позначати через $d_X\mu(A)$. За теоремою Нікодима функція множини $d_X\mu$ виявляється мірою на $\mathcal{B}(M)$, і її називають сильною похідною (похідною Фоміна) міри μ уздовж векторного поля X. При цьому очевидно, що $d_h\mu(M) = 0$, а це означає, що $d_X\mu$ завжди є знакозмінною мірою, навіть якщо вихідна міра μ є невід'ємною. Саме тому доцільно з самого початку допускати до розгляду знакозмінні міри.

Означення 4.3. *Міра μ називається диференційовною за Скороходом (в слабкому сенсі) вздовж векторного поля X, якщо для кожної функції $f \in \in C_b(M)$ функція*

$$F_f(t) = \int\limits_M f\big(\Phi_{-t}(x)\big)\,\mu(dx) = \int\limits_M f\,d\mu_t$$

є диференційовною на $\mathbb{R}$.

Слабка диференційовність міри μ еквівалентна тому, що для кожної функції $f \in C_b(M)$ існує скінченна границя

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_M f\,d(\mu_t - \mu) = \lim_{t\to 0}\int\limits_M f\,d\left(\frac{\mu_t - \mu}{t}\right).$$

При цьому з теореми О. Д. Александрова випливає (див. [5, с. 96]), що якщо міра μ диференційовна за Скороходом вздовж векторного поля X, то існує міра ν на $\mathcal{B}(M)$ така, що для всіх функцій $f \in C_b(M)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_M f\,d(\mu_t - \mu) = F'_f(0) = \int\limits_M f\,d\nu. \tag{4.1}$$

Вказана міра ν називається похідною Скорохода (слабкою похідною) міри μ вздовж векторного поля X і позначається $d_X\mu$. Однозначність визначення $d_X\mu$ випливає з [17, с. 45].

Якщо у рівність (4.1) підставити функцію $f = 1$, то вираз зліва при кожному $t \in \mathbb{R}$ буде рівний нулю, а тому $0 = F'_f(0) = \nu(M)$. Отже, як і для сильної диференційовності, отримуємо, що похідна міри завжди є знакозмінною мірою, і тому немає сенсу обмежуватися розглядом невід'ємних мір.

Доведемо тепер лему, яка є аналогом леми 1 з [6].

Лема 4.3. *Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число, m — міра на $\mathcal{B}(M)$, $m_t, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ – зсуви m вздовж векторного поля X. Тоді наступні умови є еквівалентними:*
1) Для кожної множини $A \in \mathcal{B}(M)$ існує таке число $c(A) > 0$, що для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ виконується нерівність $\big|m_t(A) - m(A)\big| \leqslant c(A) \cdot |t|$.
2) Існує таке число $C > 0$, що для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ виконується нерівність $\|m_t - m\| \leqslant C \cdot |t|$.
3) Для кожної функції $f \in C_b(M)$ існує таке число $d(f) > 0$, що нерівність $\left|\int_M f\, d(m_t - m)\right| \leqslant d(f) \cdot |t|$ виконується для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
4) Існує таке число $D > 0$, що $\left|\int_M f\, d(m_t - m)\right| \leqslant D \cdot \|f\| \cdot |t|$ для всіх функцій $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Доведення.

<u>$2 \Longrightarrow 1$</u>: Для кожного $A \in \mathcal{B}(M)$ в якості $c(A)$ можемо взяти C.

<u>$1 \Longrightarrow 2$</u>: Розглянемо сім'ю мір $S = \left\{\dfrac{m_t - m}{t} \mid t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \backslash \{0\}\right\}$ на $\mathcal{B}(M)$. Тоді:

$$\forall A \in \mathcal{B}(M) \;\; \exists c(A) > 0 : \;\; \forall \nu \in S : \qquad \big|\nu(A)\big| \leqslant c(A).$$

Застосовуючи теорему Нікодима [23, с. 336], отримуємо, що існує така константа $N > 0$, що нерівність $\big|\nu(A)\big| \leqslant N$ виконується для всіх $A \in \mathcal{B}(M)$ і всіх $\nu \in S$. Тоді в якості константи C можемо взяти $2\,N$.

<u>$2 \Longrightarrow 4$</u>: Можемо взяти $D = C$. Дійсно, для всіх функцій $f \in C_b(M)$ і всіх чисел $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ виконується нерівність:

$$\left|\int\limits_M f\, d(m_t - m)\right| \leqslant \int\limits_M |f|\, d|m_t - m| \leqslant \|f\| \cdot \|m_t - m\| \leqslant \|f\| \cdot C\,|t|.$$

<u>$4 \Longrightarrow 2$</u>: Для $\nu_t = \dfrac{m_t - m}{t}$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \backslash \{0\}$ розглядаємо функціонали $L_{\nu_t} \in$

$\in \big(C_b(M)\big)^*$, що задаються умовою (1.1), тоді $\|L_{\nu_t}\| = \big\|(m_t - m)/t\big\|$. Але з іншого боку за умовою 4 для кожного $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\backslash\{0\}$: $\|L_{\nu_t}\| \leqslant D$. Отже, для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ має місце нерівність $\|m_t - m\| \leqslant D \cdot |t|$.

4 $\Longrightarrow$ 3: Для кожної функції $f \in C_b(M)$ в якості $d(f)$ можемо взяти $D \cdot \|f\|$.

3 $\Longrightarrow$ 4: Розглянемо сім'ю функціоналів $\big\{L_{\mu_t} \mid |t| \in (0, \varepsilon]\big\} \subset \big(C_b(M)\big)^*$, визначених умовою (1.1). Тоді для кожної $f \in C_b(M)$ існує таке $d(f) > 0$, що

$$\big|L_{\mu_t} f\big| = \left|\int\limits_M f\, d\left(\frac{m_t - m}{t}\right)\right| \leqslant d(f), \qquad \forall\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\backslash\{0\}.$$

За теоремою Банаха-Штейнгауза [3, с. 220] множина $\big\{\|L_{\mu_t}\| \mid 0 < |t| \leqslant \varepsilon\big\}$ є обмеженою, тобто існує таке $D > 0$, що $\|L_{\mu_t}\| \leqslant D$ для всіх $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\backslash\{0\}$. Тобто для кожної $f \in C_b(M)$ і кожного $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\backslash\{0\}$ виконується нерівність

$$\left|\int\limits_M f\, d(m_t - m)\right| = |t| \cdot |L_t\, f| \leqslant |t| \cdot \|L_t\| \cdot \|f\| \leqslant |t| \cdot D \cdot \|f\|.$$

Для $t = 0$ ця нерівність очевидна, тому умова 4 виконується. ∎

4.2 Властивості сильної диференційовності мір

Нехай міра μ є диференційовною за Фоміним уздовж обмеженого векторного поля X, $d_X\mu$ — відповідна сильно пахідна. Тоді, повторюючи міркування для випадку диференційовності за напрямком ([5, ст. 100–108]), можна показати, що:

1. Міри μ^+, μ^-, $|\mu|$ також є диференційовними уздовж X і при цьому:

$$d_X(\mu^+) = d_X\mu(\cdot \cap M^+), \quad d_X(\mu^-) = -d_X\mu(\cdot \cap M^-),$$
$$d_X\big(|\mu|\big) = d_X\mu(\cdot \cap M^+) - d_X\mu(\cdot \cap M^-).$$

2. Міра $d_X\mu$ є неперервною вздовж X та абсолютно неперервною відно-

сно міри μ. При цьому щільність Радона-Нікодима $\dfrac{d(d_X\mu)}{d\mu}$ називається логарифмічною похідною μ уздовж векторного поля X.

3. Для кожної обмеженої борелівської функції f і кожного $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\int\limits_M f\, d(\mu_t - \mu) = \int\limits_0^t \int\limits_M f(x - sh)\, d_h\mu(dx).$$

4. Нехай $f\colon M \to \mathbb{R}$ — обмежена борелівська функція, майже всюди відносно μ диференційовна вздовж векторного поля X (в нулі), причому існує така функція $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ і таке $\delta > 0$, що для всіх $t \in (-\delta, \delta)$ і всіх $x \in M$:

$$\left|\frac{(f \circ \Phi_t)(x) - f(x)}{t}\right| \leqslant g(x),$$

   Тоді:

$$\int\limits_M \partial_X f(x)\, \mu(dx) = -\int\limits_M f(x)\, d_X\mu(dx).$$

5. Якщо $f\colon M \to \mathbb{R}$ — обмежена борелівська функція, яка має рівномірно обмежену похідну $\partial_X f$ вздовж векторного поля X, то міра $f \cdot \mu$ також є диференційовною вздовж X і при цьому

$$d_X\nu = \partial_X f \cdot \mu + f \cdot d_X\mu,$$

6. Для мір μ, μ_t та $d_X\mu$ виконуються нерівності:

$$\|\mu_t - \mu\| \leqslant |t| \cdot \|d_X\mu\|, \qquad \left\|\frac{\mu_t - \mu}{t} - d_X\mu\right\| \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$
$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \|\mu_t - \mu - t\, d_X\mu\| \leqslant |t| \sup_{0<s<t} \left\|(d_X\mu)_s - d_X\mu\right\|$$

Сформулюємо тепер критерій диференційовності міри за Фоміним вздовж векторного поля (доводиться аналогічно пропозиції 3.3.4 з [5]).

Теорема 4.1. *Міра μ диференційовна за Фоміним вздовж векторного поля X тоді і тільки тоді, коли існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що*

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int\limits_0^t \nu_s(A)\, ds, \qquad \forall A \in \mathcal{B}(M),\ t \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

і при цьому виконується одна з двох умов: ν неперервна вздовж X або ν абсолютно неперервна відносно μ. При цьому $d_X\mu = \nu$.

Іншим критерієм того, що міра ν є сильної похідної міри μ уздовж векторного поля X є збіжність

$$\int\limits_M f\, d\left(\frac{\mu_t - \mu}{t}\right) \xrightarrow[t\to 0]{} \int\limits_M f\, d\nu$$

для кожної обмеженої борелівської функції f.

Таким чином, із сильної диференційовності випливає слабка, і відповідні похідні збігаються.

4.3 Властивості слабкої диференційовності мір

Наступна теорема об'єднує у собі результати [6] (лема 2) і [39, с. 160] та є їх узагальненням на випадок диференційовності вздовж векторних полів.

Теорема 4.2. *Наступні умови є еквівалентними:*

1) Міра μ диференційовна за Скороходом уздовж векторного поля X.

2) Існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що для всіх множин $A \in \mathcal{B}(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int\limits_0^t \nu_s(A)\, ds. \tag{4.3}$$

3) Існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що для всіх функцій $f \in C_b(M)$ виконується *рівність*

$$\int\limits_M f(x)\,(\mu_t-\mu)(dx) = \int\limits_0^t\int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds, \qquad \forall\ t\in\mathbb{R}. \tag{4.4}$$

4) Існує міра така ν на $\mathcal{B}(M)$, що рівність (4.4) *виконується для будь-якої обмеженої борелівської функції f на M.*

При цьому міра ν, визначена в умовах 2-4, збігається з похідною Скорохода міри μ.

Доведення.

$\underline{1 \Longrightarrow 3}$: Нехай міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X. Тоді існує така міра ν на $\mathcal{A}$, що для всякої функції $f\in C_b(M)$ функція $F_f(t)$ з означення 4.3 є диференційовною на $\mathbb{R}$ і при цьому для всіх $t_0\in\mathbb{R}$:

$$F_f'(t_0) = {F_{f\circ\Phi_{-t_0}}}'(0) = \int\limits_M f\circ\Phi_{-t_0}\,d\nu, \qquad \big|F_f'(t_0)\big| \leqslant \|f\|\cdot\|\nu\|.$$

Отже, функції $F_f(t)$ задовольняють умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца для всіх $f\in C_b(M)$ і всіх $t\in\mathbb{R}$ отримуємо необхідну рівність:

$$\int\limits_M f(x)\,(\mu_t-\mu)(dx) = F_f(t)-F_f(0) = \int\limits_0^t F_f'(s)\,ds = \int\limits_0^t\int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds.$$

$\underline{3 \Longrightarrow 1}$: Нехай існує така міра ν на $\mathcal{B}(M)$, що для всіх $f\in C_b(M)$ виконується умова (4.4). Тобто для кожної функції $f\in C_b(M)$ і кожного числа $t\in\mathbb{R}$

$$F_f(t)-F_f(0) = \int\limits_0^t g_f(s)\,ds, \quad \text{де } g_f(s) = \int\limits_M f\circ\Phi_{-s}\,d\nu,\ F_f(t) = \int\limits_M f\,d\mu_t.$$

Для кожного $f\in C_b(M)$ функція g_f є неперервною на $\mathbb{R}$, тому F_f диференційовна на $\mathbb{R}$, і при цьому $F_f'(t_0) = g_f(t_0)$ для всіх $t_0\in\mathbb{R}$. Отже,

$F_f'(0) = g_f(0) = \int_M f\,d\nu$, тобто міра μ слабко диференційовна вздовж векторного поля X, а її похідна Скорохода співпадає з мірою ν.

<u>$2 \Longleftrightarrow 4$</u>: Для кожного $A \in \mathcal{B}(M)$ розглянемо індикаторну функцію $f = I_A$. Враховуючи, що

$$\int\limits_M I_A\,d(\mu_t - \mu) = \mu_t(A) - \mu(A), \qquad \int\limits_0^t \int\limits_M I_A\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds = \int\limits_0^t \nu_s(A)\,ds,$$

отримуємо, що умова 2 еквівалентна виконанню рівності (4.4) для індикаторних функцій $f = I_A$, $A \in \mathcal{B}(M)$. Залишилося використати теорему Лебега про мажоровану збіжність і лему 2.1.8 [8, т. 1], щоб показати, що якщо рівність (4.4) виконується для всіх індикаторних функцій, то вона виконується і для всіх борелівських обмежених функцій.

<u>$4 \Longrightarrow 3$</u>: Очевидно.

<u>$3 \Longrightarrow 2$</u>: Нехай для деякої міри ν для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність (4.4). Зафіксуємо $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (для $t = 0$ очевидно) і встановимо рівність (4.3) для всіх $A \in \mathcal{B}(M)$. Для цього розглянемо простір $[0,t]$ (або $[t,0]$ при $t < 0$) з σ-алгеброю $\mathcal{B}\big([0,t]\big)$ та мірою Лебега λ і простір M з σ-алгеброю $\mathcal{B}(M)$ та мірою ν на $\mathcal{B}(M)$. Тоді на $\mathcal{B}\big([0,t]\big) \otimes \mathcal{B}(M)$ визначено міру $\lambda \otimes \nu$. За теоремою 6.4.2(i) [8, т. 2] $\mathcal{B}\big([0,t]\big) \otimes \mathcal{B}(M) = \mathcal{B}\big([0,t] \times M\big)$. Крім того, за пропозицією 3.3.2 [8, т. 1] для всіх $s \in [0,t]$ та $B \in \mathcal{B}\big([0,t] \times M\big)$ множина $B_s = \big\{x \in M \bigm| (s,x) \in B\big\}$ належить $\mathcal{B}(M)$, а функція $s \mapsto \nu(B_s)$ є борелівською і при цьому за теоремою 3.4.1 [8, т. 1] для кожної множини $B \in \mathcal{B}\big([0,t] \times M\big)$:

$$(\lambda \otimes \nu)(B) = \int\limits_0^t \nu(B_s)\,ds.$$

Розглянемо відображення $\varphi\colon [0,t] \times M \to M$, $\varphi(s,x) = \Phi(-s,x)$. Тоді

$$\varphi^{-1}(A) = \big\{(s,x) \in [0,t] \times M \bigm| x \in \Phi_s(A)\big\}$$

для кожної множини $A \in \mathcal{B}(M)$, отже, $\big(\varphi^{-1}(A)\big)_s = \Phi_s(A)$ при всіх $A \in \mathcal{B}(M)$ і всіх $s \in [0,t]$. Відображення φ є борелівським, тому воно індукує міру m_t на $\mathcal{B}(M)$:

$$\forall A \in \mathcal{B}(M): \quad m_t(A) = (\lambda \otimes \nu)\big(\varphi^{-1}(A)\big) = \int\limits_0^t \nu\Big(\big(\varphi^{-1}(A)\big)_s\Big)\, ds = \int\limits_0^t \nu_s(A)\, ds.$$

Для кожної функції $f \in C_b(M)$ функція $f \circ \varphi$ є інтегровною за мірою $\lambda \otimes \nu$ і при цьому:

$$\int\limits_M f\, dm_t = \int\limits_{[0,t]\times M} f \circ \varphi\, d(\lambda \otimes \nu). \tag{4.5}$$

З іншого боку, за теоремою Фубіні [8, т. 1] (теорема 3.4.4) маємо:

$$\int\limits_{[0,t]\times M} f \circ \varphi\, d(\lambda \otimes \nu) = \int\limits_0^t \int\limits_M f\big(\varphi(s,x)\big)\, \nu(dx)\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\, \nu(dx)\, ds.$$

Враховуючи рівність (4.4), отримуємо:

$$\int\limits_{[0,t]\times M} f \circ \varphi\, d(\lambda \otimes \nu) = \int\limits_M f(x)\, (\mu_t - \mu)(dx). \tag{4.6}$$

З рівностей (4.5) і (4.6) для всіх $f \in C_b(M)$ одержуємо:

$$\int\limits_M f\, dm_t = \int\limits_M f\, d(\mu_t - \mu).$$

Звідси за [17, с. 45] міри m_t та $\mu_t - \mu$ співпадають, що і дає рівність (4.3) для всіх множин $A \in \mathcal{B}(M)$. Оскільки t бралося довільним, теорему доведено. ∎

Зауваження 4.1. *Оскільки подібний критерій має місце і для диференційовності за Фоміним (див. теорему 4.1), сильна диференційовність міри μ еквівалентна її слабкій диференційовності при абсолютно неперервній відносно μ похідній Скорохода $d_X\mu$ (або неперервній вздовж X).*

Наслідок 4.1. *Нехай міра є μ радонівською, $\mathcal{F} \subset C_b(M)$ — деякий клас функцій, що розділяє точки M (тобто для будь-яких різних точок $x, y \in M$ існує така функція $f \in \mathcal{F}$, що $f(x) \neq f(y)$). Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) Міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X і має радонівську похідну Скорохода.

2) Існує радонівська міра ν, для якої рівність (4.4) *виконується для всіх функцій $f \in \mathcal{F}$.*

3) Існує така радонівська міра ν на M, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}$ функція $F_f(t) = \int_M f\, d\mu_t$ є диференційовною на $\mathbb{R}$ і при цьому $F_f'(t) = \int_M f\, d\nu_t$.

Міра ν з 2 і 3 є похідною Скорохода від μ.

Доведення. Імплікація $\underline{1 \Longrightarrow 3}$ негайно випливає з означення слабкої диференційовності.

$\underline{3 \Longrightarrow 2}$: Повністю повторює доведення імплікації $1 \Longrightarrow 3$ в теоремі 4.2.

$\underline{2 \Longrightarrow 1}$: Повторюючи міркування частини $3 \Longrightarrow 2$ теореми 4.2, отримуємо, що при кожному фіксованому $t \in \mathbb{R}$ для всіх $f \in \mathcal{F}$ виконується рівність

$$\int\limits_M f\, dm_t = \int\limits_M f\, d(\mu_t - \mu),$$

де міру m_t визначено в теоремі 4.2. Міра λ є радонівською за [5, с. 26], тому радонівськими є також міри: $\lambda \otimes \nu$ — за теоремою 7.6.2 [8, т. 2], m_t і μ_t — за теоремою 9.1.1 [8, т. 2], і також міра $\mu_t - \mu$. Тоді за лемою 1.2.10 [5] отримуємо, що $m_t = \mu_t - \mu$, і це завершує доведення. ∎

Зауваження 4.2. *При доведенні останніх двох результатів були використані теореми 3.3.2, 3.4.1, 3.4.4, та 7.6.2 з [8], сформульовані для невід'ємних мір. Справедливість цих теорем в випадку знакозмінних мір випливає з розкладу Хана-Жордана та означення добутку знакозмінної і невід'ємної мір: $\lambda \otimes \nu = \lambda \otimes \nu^+ - \lambda \otimes \nu^-$. Зауваження про справедливість теореми Фубіні у випадку знакозмінних мір є у [47, с. 186].*

Наслідок 4.2. *Нехай простір $C_b^1(M)$ розділяє точки многовиду M, а μ та ν — радонівські міри на M. Тоді μ є слабко диференційовною уздовж обмеженого векторного поля X і $d_X\mu = \nu$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $f \in C_b^1(M)$ має місце рівність*

$$\int\limits_M f\,d\nu = -\int\limits_M \partial_X f\,d\mu. \tag{4.7}$$

Доведення. Для кожної функції $f \in C_b^1(M)$ і кожного $s \in \mathbb{R}$ функція $f \circ \Phi_s$ належить до класу $C_b^1(M)$ (за лемою 4.2), і при цьому $\partial_X(f \circ \Phi_s) = \partial_X f \circ \Phi_s$. Якщо $f \in C_b^1(M)$, то для кожного $t \in \mathbb{R}$ і кожного $x \in M$ виконується нерівність

$$\left|\frac{f \circ \Phi_t - f}{t}(x)\right| = \Big[\xi \in [0,t]\Big] = (f \circ \Phi_x)'(\xi) \leqslant \max_{(\varphi,U)\in\Omega,\ y\in\varphi(U)} \left\|\left(f \circ \varphi^{-1}\right)'(y)\right\| \cdot C,$$

де C — стала з означення обмеженого векторного поля для X. Тому за теоремою Лебега для кожного $f \in C_b^1(M)$ при кожному $s \in \mathbb{R}$ має місце збіжність

$$\frac{1}{t}\int\limits_M f\,d(\mu_{s+t} - \mu_s) = \int\limits_M \frac{f \circ \Phi_{-t} - f}{t}\,d\mu_s \xrightarrow[t\to 0]{} -\int\limits_M \partial_X f\,d\mu_s. \tag{4.8}$$

$\Longrightarrow$: Необхідна рівність випливає безпосередньо з рівності (4.1) і умови (4.8) при $s = 0$.

$\Longleftarrow$: Для кожної функції $f \in C_b^1(M)$ і кожного $s \in \mathbb{R}$, використовуючи умову (4.8) і рівність (4.7) для функції $f \circ \Phi_{-s}$, отримуємо, що має місце збіжність

$$\frac{1}{t}\int\limits_M f\,d(\mu_{s+t} - \mu_s) \xrightarrow[t\to 0]{} -\int\limits_M \partial_X f\,d\mu_s = -\int\limits_M \partial_X(f \circ \Phi_{-s})\,d\mu = \int\limits_M f \circ \Phi_{-s}\,d\nu.$$

Клас $C_b^1(M)$ розділяє точки M. Тому за наслідком 4.1 міра μ є диференційовною за Скороходом уздовж X, а ν — відповідна похідна Скорохода.

Наслідок доведено. ■

Рівність (4.7) називається формулою інтегрування частинами.

Зауваження 4.3. *Клас $C_b^1(M)$ розділяє точки, зокрема, для випадку банахового простору, а також гільбертового многовиду.*

Врахувавши зауваження 4.1, отримаємо критерій і для сильної диференційовності:

Наслідок 4.3. *Нехай простір $C_b^1(M)$ розділяє точки многовиду M. Тоді радонівська міра μ є сильно диференційовною вздовж обмеженого векторного поля X тоді і тільки тоді, коли існує така функція $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$, що для кожного $f \in C_b^1(M)$ має місце рівність*

$$\int\limits_M fh \, d\mu = -\int\limits_M \partial_X f \, d\mu.$$

Сильною похідною при цьому буде радонівська міра $\nu = h \cdot \mu$.

Наслідок 4.4. *Нехай міра μ диференційовна за Скороходом вздовж векторного поля X, а ν її слабка похідна. Тоді якщо $f\colon M \to \mathbb{R}$ — обмежена борелівська функція, яка має рівномірно обмежену похідну $\partial_X f$ вздовж векторного поля X, то для функції f справедливою є формула інтегрування частинами* (4.7).

Доведення. Якщо обмежена борелівська функція f є диференційовною вздовж векторного поля X, тоді для кожного $s \in \mathbb{R}$ функція $f \circ \Phi_s$ також є диференційовною вздовж X і при цьому $\partial_X(f \circ \Phi_s) = \partial_X f \circ \Phi_s$. Врахувавши обмеженість похідної $\partial_X f$, отримуємо для всіх $s \in \mathbb{R}$ збіжність (4.8).

З іншого боку за теоремою 4.2 маємо при кожному $t \in \mathbb{R}$ рівність:

$$\int\limits_M \frac{f\big(\Phi_{-t}(x)\big) - f(x)}{t} \, \mu(dx) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t \int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big) \, \nu(dx) \, ds.$$

Оскільки внутрішній інтеграл є неперервним по s (це випливає з того, що $f \circ \Phi_s$ є обмеженою і неперервною по s при кожному $x \in M$, і теореми Лебега), існує границя:

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_M \frac{f\big(\Phi_{-t}(x)\big)-f(x)}{t}\,\mu(dx)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_M f\big(\Phi_{-s}(x)\big)\,\nu(dx)\,ds=\int\limits_M f(x)\,\nu(dx).$$

Для завершення доведення залишилося використати рівність (4.8) для $s=0$. ■

Доведемо тепер ще одну корисну властивість диференційовності.

Твердження 4.1. *Нехай міра μ є слабко диференційовною уздовж обмеженого векторного поля X, а борелівська множина S є такою, що потік Φ взаємно однозначний на $\mathbb{R}\times S$. Тоді для кожного $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ виконується рівність:*

$$\mu\big(\Phi_A(S)\big)=\int\limits_A d_X\mu\big(\Phi_{(-\infty,s]}(S)\big)\,ds.$$

Доведення. Візьмемо спочатку в якості множини A напівінтервал $(a,b]$. Врахувавши взаємну однозначність Φ на $\mathbb{R}\times S$, отримуємо:

$$\Phi_A(S)=\Phi_{(a,b]}(S)=\Phi_{(-\infty,b]}(S)\backslash\Phi_{(-\infty,a]}(S)=\Phi_b(\widetilde{S})\backslash\Phi_a(\widetilde{S}),$$

де $\widetilde{S}=\Phi_{(-\infty,0]}(S)$. Тоді, оскільки $\Phi_a(\widetilde{S})\subset\Phi_b(\widetilde{S})$, за рівністю (4.3) отримуємо:

$$\mu\big(\Phi_A(S)\big)=\mu\big(\Phi_b(\widetilde{S})\big)-\mu\big(\Phi_a(\widetilde{S})\big)=\int\limits_a^b(d_X\mu)_s(\widetilde{S})\,ds=\int\limits_A(d_X\mu)_s(\widetilde{S})\,ds.$$

Необхідна рівність для всіх борелівських множин A випливає з того факту, що борелівська σ-алгебра може бути породжена напівінтервалами вигляду $(a,b]$. Твердження доведено. ■

4.4 Критерій диференційовності мір за Скороходом

У даному підрозділі доводиться основний результат розділу 4, а саме критерій слабкої диференційовності борелівської міри уздовж обмеженого векторного поля. Спочатку теорема доводиться для більш простого випадку банахового простору, а потім для загального випадку банахового многовиду з рівномірною структурою.

4.4.1 Доведення критерію для випадку банахового простору

Теорема 4.3. *Нехай M — банахів простір, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$, X — векторне поле класу C^1 на M. І нехай існує число $L > 1$ таке, що для кожної точки $x \in M$ виконуються нерівності $\|X(x)\| \leqslant L$, $\|X'(x)\| \leqslant L$. Тоді міра μ є диференційовною за Скороходом вздовж X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожної множини $A \in \mathcal{A}$ існує таке $c(A)$, що:*

$$\big|\mu_t(A) - \mu(A)\big| \leqslant c(A)\,|t|, \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma]. \tag{4.9}$$

Доведення.

$\Longrightarrow$: Нехай міра μ диференційовна за Скороходом вздовж векторного поля X. Тоді за теоремою 4.2 існує міра ν на $\mathcal{A}$ така, що для всіх $A \in \mathcal{A}$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\mu_t(A) = \mu(A) + \int\limits_0^t \nu_s(A)\,ds.$$

Звідси для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $t \in \mathbb{R}$ отримуємо нерівність $\big|\mu_t(A) - \mu(A)\big| \leqslant |t| \cdot \|\nu\|$. Отже, можемо обрати довільне $\gamma > 0$, і для кожного $A \in \mathcal{A}$ взяти $c(A) = \|\nu\|$.

$\Longleftarrow$: Нехай міра μ така, що виконується умова (4.9). За лемою 4.3 ця умова рівносильна тому, що існує константа $C > 0$, така, що для всіх $t \in [-\gamma, \gamma]$ виконується нерівність

$$\|\mu_t - \mu\| \leqslant C \cdot |t|.$$

Позначимо через J відрізок $[-\gamma, \gamma]$.

Випадок 1: Міра μ має компактний носій S. Оскільки відображення потоку $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$ неперервне, то множина $K = \Phi(J \times S)$ є компактною, і при цьому для кожного $t \in J$ міра μ_t зосереджена на $\Phi_{-t}(S) \subset K$.

При $t \in J\backslash\{0\}$ визначимо міри $n_t = \left.\dfrac{\mu_t - \mu}{t}\right|_K$, що є звуженнями мір $\dfrac{\mu_t - \mu}{t}$ на K, і відповідні функціонали L_{n_t} (див. (1.1)) на $C_b(K)$. Тоді для кожного $t \in J\backslash\{0\}$ має місце нерівність $\|L_{n_t}\| = \|n_t\| \leqslant C$, тобто $\big\{L_{n_t} \bigm| t \in J\backslash\{0\}\big\} \subset \subset \overline{B}_C^{(C_b(K))^*}(0)$. Оскільки K — метричний компакт, то $C_b(K)$ — сепарабельний нормований простір [25, с. 162]. Тому за теоремою Банаха-Алаоглу [30, с. 218] $\overline{B}_C^{(C_b(K))^*}(0)$ — компакт в $*$-слабкій топології в $\big(C_b(K)\big)^*$. Отже, існує послідовність $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ з $J\backslash\{0\}$ і лінійний функціонал $L \in \big(C_b(K)\big)^*$, такі, що $L_{n_{t_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{*\text{-сл.}} L$, $\|L\| \leqslant C$. Тобто для будь-якої функції $f \in C_b(K)$ має місце збіжність $L_{n_{t_n}} f \xrightarrow[n\to\infty]{} Lf$.

За теоремою Ріса [8, т. 2, с. 134] існує радонівська міра ν на K, така, що

$$\forall f \in C_b(K): \qquad L\, f = \int\limits_K f\, d\nu,$$

і при цьому $\|\nu\| = \|L\| \leqslant C$. Зберігши позначення, довизначаємо міру ν нулем на всю множину M. При цьому ν є щільною в M та регулярною за [5, с. 25], а отже, ν — радонівська міра.

Кожна функція f з класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$ однозначно представляється у вигляді суми $f = u + iv$, де u та v належать до $C_b(K)$. Тому будь-який функціонал $l \in \big(C_b(K)\big)^*$ можемо розглядати і для функцій з класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$: $lf = lu + i\, lv$. Тоді $L_{t_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} Lf$ і для функцій f з класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$, тобто:

$$\forall f \in C_b^{\mathbb{C}}(K): \quad \int\limits_K f\, d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_K f\, d\nu. \tag{4.10}$$

Нехай l — дійсний обмежений лінійний функціонал на M. Розглядаємо функцію $\psi\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{C}$:

$$\varphi(s, x) = \exp\Big(i\, l\big(\Phi_{-s}(x)\big)\Big).$$

При фіксованому значенні змінної $s \in \mathbb{R}$ можемо також розглянути функцію $\psi_s \colon M \to \mathbb{C}$, $\psi_s(x) = \psi(s,x)$. При цьому $\psi_s \circ \Phi_{-u} = \psi_{s+u}$ для всіх $s, u \in \mathbb{R}$. Для кожного $x \in M$ функція $s \mapsto \psi(s,x)$ є диференційовною на $\mathbb{R}$, а її похідна

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \psi(u,x) = -\exp\Big(i\, l\big(\Phi_{-s}(x)\big)\Big) \cdot i\, l\Big(X\big(\Phi_{-s}(x)\big)\Big)$$

неперервна за сукупністю аргументів s та x на $\mathbb{R} \times M$, а тому обмежена на компакті $[-t,t] \times S$ деякою константою $B(t) > 0$ при кожному $t > 0$.

При кожному $s \in \mathbb{R}$ функція ψ_s належить до класу $C_b^{\mathbb{C}}(M)$. Тоді $L_{t_n}\psi_s \xrightarrow[n\to\infty]{} L\,\psi_s$, тобто:

$$\forall s \in \mathbb{R}: \quad \int\limits_K \psi_s\, d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_K \psi_s\, d\nu. \tag{4.11}$$

Зафіксуємо деяке $s \in \mathbb{R}$ і перетворимо ліву частину умови (4.11):

$$\int\limits_K \psi_s\, d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) = \frac{1}{t_n}\int\limits_M (\psi_s \circ \Phi_{-t_n} - \psi_s)\, d\mu = \frac{1}{t_n}\int\limits_S (\psi_{s+t_n} - \psi_s)\, d\mu.$$

Тоді, враховуючи диференційовність ψ по s при кожному фіксованому $x \in S$ і обмеженість похідної, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність отримуємо для всіх $s \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_K \psi_s\, d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) = \frac{1}{t_n}\int\limits_S (\psi_{s+t_n} - \psi_s)\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_S \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \psi(u,x)\, \mu(dx).$$

З рівності (4.11), одержуємо:

$$\forall s \in \mathbb{R}: \quad \int\limits_K \psi_s\, d\nu = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \psi(u,x)\, \mu(dx). \tag{4.12}$$

Для кожного $x \in K$ функція $\psi(s,x)$ є неперервною по s на $\mathbb{R}$, і крім того $\big|\psi(s,x)\big| = 1$ скрізь на області визначення. Тоді за теоремою Лебега ліва частина рівності (4.12) є неперервною на $\mathbb{R}$, а тому інтегровною відносно міри Лебега на $\mathbb{R}$. Функція $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s}\psi(u,x)$ є неперервною за сукупністю аргументів на $\mathbb{R}\times M$, а тому інтегровною відносно міри $\lambda\otimes\mu$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}\times M)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(M)$.

Зафіксуємо деяке число $t\in\mathbb{R}$. Тоді за теоремою Фубіні [8, т. 1, с. 219] можемо коректно проінтегрувати обидві частини виразу (4.12) на проміжку $[0,t]$, і при цьому замінити порядок інтегрування в правій частині:

$$\int\limits_0^t\int\limits_K \psi_s\,d\nu\,ds=\int\limits_S\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s}\psi(u,x)\,ds\,\mu(dx)=\int\limits_S(\psi_t-\psi_0)\,d\mu=$$
$$=\int\limits_M(\psi_t-\psi_0)\,d\mu=\int\limits_M\psi_0\,d(\mu_t-\mu)=\int\limits_K\psi_0\,d(\mu_t-\mu).$$

Позначивши через $\widetilde{K}(t)$ компакт $\Phi\big([-|t|,|t|\,]\times K\big)$ і перейшовши в лівій частині рівності до мір $\nu_s=\nu\circ\Phi_s$, зосереджених на $\Phi_{-s}(K)\subset\widetilde{K}(t)$, отримуємо:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\widetilde{K}(t)}\psi_0\,d\nu_s\,ds=\int\limits_K\psi_0\,d(\mu_t-\mu).$$

Таким чином для всіх функціоналів $l\in M^*$ виконується рівність

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\widetilde{K}(t)}\exp\big(i\,l(x)\big)\,\nu_s(dx)\,ds=\int\limits_K\exp\big(i\,l(x)\big)\,(\mu_t-\mu)(dx).$$

Розглянемо тепер клас функцій $N=$ л.о.$\big\{\exp\big(i\,l(x)\big)\;\big|\;l\in M^*\big\}$ над полем $\mathbb{C}$, який є підмножиною $C_b^{\mathbb{C}}\big(\widetilde{K}(t)\big)$. Тоді для кожної функції f з класу N виконується рівність

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\widetilde{K}(t)}f\,d\nu_s\,ds=\int\limits_K f\,d(\mu_t-\mu).\tag{4.13}$$

Клас N є підалгеброю класу $C_b^{\mathbb{C}}\big(\widetilde{K}(t)\big)$ комплекснозначних неперервних функцій на компакті $\widetilde{K}(t)$. При цьому він містить одиничну функцію, а для кожної функції $f \in N$ функція $\overline{f}$ також лежить в N. Крім того, N розділяє точки простору $\widetilde{K}(t)$. Дійсно, якщо $x, y \in \widetilde{K}(t),\ x \neq y$, і при цьому вони лінійно незалежні, то можемо задати лінійний неперервний функціонал l на л.о.$\{x, y\}$ так, що $l(x) = 0$, $l(y) = 1$. Якщо ж вектори x і y є лінійно залежними, то можемо вибрати такий функціонал l на л.о.$\{x\}$, що $l(x-y) \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. В обох випадках за теоремою Хана-Банаха [3, с. 201] функціонал l продовжується до функціоналу L на M, і $\exp\bigl(i\,L(x)\bigr) \neq \exp\bigl(i\,L(y)\bigr)$. Тоді за теоремою Стоуна-Вейерштрасса [25, с. 160] множина N є щільною в $C_b^{\mathbb{C}}\bigl(\widetilde{K}(t)\bigr)$. Це означає, що для кожної функції $f \in C_b^{\mathbb{C}}\bigl(\widetilde{K}(t)\bigr)$ існує послідовність функцій $g_n \in N$, що рівномірно збігається до f. Тому, використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, граничним переходом отримуємо, що для всіх функцій $f \in C_b^{\mathbb{C}}\bigl(\widetilde{K}(t)\bigr)$ виконується рівність (4.13).

Для кожної функції $f \in C_b(M)$ і для кожного дійсного t звуження функції f на компакт $\widetilde{K}(t)$ належить до класу $C_b^{\mathbb{C}}\bigl(\widetilde{K}(t)\bigr)$. Тому для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ маємо рівність

$$\int\limits_M f\,d(\mu_t - \mu) = \int\limits_K f\,d(\mu_t - \mu) = \int\limits_0^t \int\limits_{\widetilde{K}(t)} f\,d\nu_s\,ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f \circ \Phi_{-s}\,d\nu\,ds.$$

Отримали рівність (4.4) для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді за теоремою 4.2 міра μ диференційовна за Скороходом уздовж X, а ν — її слабка похідна.

Таким чином отримали, що якщо міра μ зосереджена на компакті S і для неї виконується умова (4.9), то вона диференційовна уздовж векторного поля X, і її слабка похідна ν є радонівською мірою, що зосереджена на компакті $K = \Phi\bigl(J \times S\bigr)$, де $J = [-\gamma, \gamma]$ при γ з умови теореми. Однак в умові теореми ми могли взяти як завгодно мале $\gamma > 0$, і внаслідок єдиності слабкої похідної отримана міра ν буде тією ж самою. Отже, похідна Скорохода ν насправді зосереджена на компакті S, як і міра μ. Крім того, якщо C — константа, така, що для всіх дійсних t виконується нерівність $\|\mu_t - \mu\| \leqslant C \cdot |t|$, то $\|\nu\| \leqslant C$.

Випадок 2: Міра μ довільна. Оскільки μ радонівська, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує компакт Q_n такий, що $|\mu|(M \backslash Q_n) < \dfrac{1}{n}$. Розглянемо компакти $K_n,\ n \in \mathbb{N}$:

$$K_1 = Q_1, \qquad K_n = \Phi\big(2J \times (K_{n-1} \cup Q_n)\big), \quad n \geqslant 2.$$

І нехай $S_n = \Phi(J \times K_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Нехай δ — неперервно диференційовна невід'ємна функція на $\mathbb{R}$, носій якої зосереджений на $[0, \gamma]$, і для якої $\int_0^\gamma \delta(t)\, dt = 1$. При фіксованих $n \in \mathbb{N}$ та $x \in M$ розглянемо функцію $s \mapsto I_{S_n} \circ \Phi_x$ на $\mathbb{R}$, де I_{S_n} — індикаторна функція множини S_n на M. Вона є обмеженою і борелівською, а тому інтегровною відносно міри Лебега. Тоді коректно розглянути функції $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \int\limits_0^\gamma I_{S_n}\big(\Phi(s,x)\big)\, \delta(s)\, ds.$$

Розглянемо міру $m = \delta \cdot \lambda$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, де λ — міра Лебега. Тоді m є диференційовною по Фоміну вздовж всякого постійного напрямку $h \in \mathbb{R}$, причому її похідна $d_1 m$ вздовж одиничного напрямку рівна $d_1 m = \delta' \cdot \lambda$ і так само, як і міра μ, зосереджена на відрізку $[0, \gamma]$. Тоді функції f_n можна записати так:

$$f_n(x) = \int\limits_0^\gamma I_{S_n}\big(\Phi_x(s)\big)\, m(ds) = m\big(\Phi_x^{-1}(S_n)\big) = m\Big(\big(\Phi^{-1}(S_n)\big)_x\Big).$$

При цьому $\Phi^{-1}(S_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \otimes M) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(M)$ і за пропозицією 3.3.2(ii) [8, т. 1] функції f_n борелівські. Крім того, для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $x \in M$:

$$\frac{f_n\big(\Phi_t(x)\big) - f_n(x)}{t} = \frac{m\big(\{s \in \mathbb{R} \mid \Phi_{s+t}(x) \in S_n\}\big) - m\big(\{s \in \mathbb{R} \mid \Phi_s(x) \in S_n\}\big)}{t} =$$
$$= \frac{1}{t}\Big(m\Big(\big\{\, u \in \mathbb{R} \,\big|\, \Phi_u(x) \in S_n \,\big\} - t\Big) - m\Big(\big\{\, s \in \mathbb{R} \mid \Phi_s(x) \in S_n \,\big\}\Big)\Big) \xrightarrow[t \to 0]{}$$
$$\xrightarrow[t \to 0]{} -d_1 m\Big(\big\{\, s \in \mathbb{R} \mid \Phi_s(x) \in S_n \,\big\}\Big) = -d_1 m\Big(\big(\Phi^{-1}(S_n)\big)_x\Big).$$

Тобто функції f_n, $n \in \mathbb{N}$, є диференційовними вздовж векторного поля X, і:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in M : \quad d_X f_n(x) = -d_1 m\Big(\big(\Phi^{-1}(S_n)\big)_x\Big).$$

Тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $x \in M$ виконується нерівність $\big|d_X f_n(x)\big| \leqslant \|d_1 m\|$. Помітимо також, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $x \in M$ має місце нерівність $0 \leqslant \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, і при цьому $f_n(x) = 1$ при $x \in K_n$ і $f_n(x) = 0$ при $x \notin \Phi(2J \times K_n)$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ можна розглянути міру $\mu_n = f_n \cdot \mu$ на $\mathcal{A}$, зосереджену на компакті $\Phi(2J \times K_n)$. Тоді для всіх $A \in \mathcal{A}$ і всіх $t \in J$ маємо

$$\Big|\mu_n\big(\Phi_t(A)\big) - \mu_n(A)\Big| = \left|\int\limits_M f_n\, I_{\Phi_t(A)}\, d\mu - \int\limits_M f_n\, I_A\, d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_M (f_n - f_n \circ \Phi_{-t})\, I_{\Phi_t(A)}\, d\mu\right| + \left|\int\limits_M (f_n \circ \Phi_{-t})\,(I_A \circ \Phi_{-t})\, d\mu - \int\limits_M f_n\, I_A\, d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_M |t| \cdot \|d_1 m\|\, d|\mu| + \left|\int\limits_M f_n\, I_A\, d(\mu_t - \mu)\right| \leqslant \|\mu_t - \mu\| + |t| \cdot \|d_1 m\| \cdot \|\mu\| \leqslant$$

$$\leqslant |t| \cdot (C + \|d_1 m\| \cdot \|\mu\|).$$

Введемо позначення $N = 2(C + \|d_1 m\| \cdot \|\mu\|)$, тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $t \in J$ виконується нерівність $\big\|(\mu_n)_t - \mu_n\big\| \leqslant N\,|t|$ і за доведеним у випадку 1 міри μ_n є диференційовними за Скороходом вздовж векторного поля X і при цьому для кожного $n \in \mathbb{N}$ міра $\nu_n = d_X \mu_n$ є радонівською і зосереджена на компакті $\Phi(2J \times K_n)$. Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність $\|\nu_n\| \leqslant N$.

Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується включення $Q_n \subset K_n$, а також нерівність $|\mu|(M \backslash Q_n) < \dfrac{1}{n}$, то $|\mu|(M \backslash K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Крім того, оскільки f_n приймає значення 1 на множині K_n, то обмеження міри μ на K_n співпадає з обмеженням міри μ_n на K_n. Тоді:

$$\|\mu - \mu_n\| = |\mu - f_n \cdot \mu|(M \backslash K_n) = |1 - f_n| \cdot |\mu|(M \backslash K_n) \leqslant |\mu|(M \backslash K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тобто міри μ_n збігаються до μ за варіацією.

Доведемо тепер, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ при $m \geqslant 3$ обмеження мір ν_{n+2} і ν_{n+m} на K_n співпадають, тобто $\nu_{n+2}\big|_{K_n} = \nu_{n+m}\big|_{K_n}$. Оскільки послідовність множин K_n зростає, то достатньо показати це для $m = 3$.

Фіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і беремо K — замкнену, а тому і компактну множину в K_n. Фіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки всі міри, що розглядаються, є борелівськими, а тому і регулярними, то знайдеться така відкрита множина $U \supset K$, що: $|\nu_{n+2}|(U \backslash K) < \varepsilon$, $\quad |\nu_{n+3}|(U \backslash K) < \varepsilon$. Оскільки M метричний простір, то він нормальний. Тоді за теоремою Урисона [23, с. 25] існує неперервна функція $z\colon M \to [0,1]$ така, що $z(x) = 1$ при $x \in K$ і $z(x) = 0$ при $x \notin U$.

Розглянемо функцію $g\colon M \to [0,1]$, $\quad g(x) = f_n(x)\, z(x)$. Вона неперервна уздовж векторного поля X і крім того:

$$\begin{cases} g(x) = 1, & \forall x \in K, \\ g(x) = 0, & \forall x \notin U \cap \Phi(2J \times K_n), \\ g(x) \in [\,0, 1\,], & \text{інакше}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Тоді оскільки $K_{n+1} = \Phi\big(2J \times (K_n \cup Q_{n+1})\big) \supset \Phi(2J \times K_n)$, то $g(x) = 0$ ззовні K_{n+1}. Тому при кожному фіксованому $t \in J$ носій функції $x \mapsto g\big(\Phi_{-t}(x)\big)$ зосереджений на K_{n+2}. Тоді, враховуючи те, що $\mu_{n+3}\big|_{K_{n+2}} = \mu\big|_{K_{n+2}} = \mu_{n+2}\big|_{K_{n+2}}$, для всіх $t \in J$ отримуємо:

$$\begin{aligned} &\int\limits_M \Big(g\big(\Phi_{-t}(x)\big) - g(x)\Big)\, \mu_{n+2}(dx) = \int\limits_{K_{n+2}} \Big(g\big(\Phi_{-t}(x)\big) - g(x)\Big)\, \mu_{n+2}(dx) = \\ &= \int\limits_{K_{n+2}} \Big(g\big(\Phi_{-t}(x)\big) - g(x)\Big)\, \mu_{n+3}(dx) = \int\limits_M \Big(g\big(\Phi_{-t}(x)\big) - g(x)\Big)\, \mu_{n+3}(dx). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Оскільки міри μ_{n+2} та μ_{n+3} диференційовні за Скороходом уздовж X, то з рівності (4.15) і умови 4 теореми 4.2 для всіх $t \in J$ отримуємо рівність

$$\int_0^t \int_M g\big(\Phi_{-s}(x)\big)\, \nu_{n+2}(dx)\, ds = \int_0^t \int_M g\big(\Phi_{-s}(x)\big)\, \nu_{n+3}(dx)\, ds. \tag{4.16}$$

Оскільки при кожному $x \in M$ функція $s \mapsto g\big(\Phi_{-s}(x)\big)$ неперервна на $\mathbb{R}$ і обмежена одиницею, то за теоремою Лебега функції $s \mapsto \int_M g\big(\Phi_{-s}(x)\big)\, d\nu_{n+2}$ та $s \mapsto \int_M g\big(\Phi_{-s}(x)\big)\, d\nu_{n+3}$ неперервні на $\mathbb{R}$. Тоді рівність (4.16) можна продиференціювати в точці $t = 0$, звідки отримуємо рівність:

$$\int_M g(x)\, \nu_{n+2}(dx) = \int_M g(x)\, \nu_{n+3}(dx).$$

Використавши умови (4.14), отримуємо нерівність:

$$\big|(\nu_{n+2} - \nu_{n+3})(K)\big| = \left| \int\limits_{(U \cap \Phi(2J \times K_n)) \setminus K} g\, d(\nu_{n+2} - \nu_{n+3}) \right| \leqslant |\nu_{n+2} - \nu_{n+3}|(U \setminus K) < 2\,\varepsilon.$$

Оскільки ε обирали довільне, то отримали, що для будь-якої замкненої множини $K \subset K_n$ справедлива рівність $\nu_{n+2}(K) = \nu_{n+3}(K)$. Тоді, рівність виконується для кожної борелівської множини $A \subset K_n$. Отже, при всіх $n \in \mathbb{N}$ і при $m \geqslant 3$: $\nu_{n+2}\big|_{K_n} = \nu_{n+m}\big|_{K_n}$.

Розглянемо міру ν на $\mathcal{A}$:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{n+2}\big(A \cap (K_n \setminus K_{n-1})\big), \quad \text{де } K_0 = \varnothing.$$

Для всіх множин $A \in \mathcal{A}$ цей ряд збігається абсолютно, бо для всіх $m \in \mathbb{N}$ має місце нерівність:

$$\sum_{n=1}^{m} \Big|\nu_{n+2}\big(A \cap (K_n \setminus K_{n-1})\big)\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |\nu_{n+2}|(K_n \setminus K_{n-1}) = |\nu_{m+2}|(K_m) \leqslant \|\nu_{m+2}\| \leqslant N.$$

Тоді за теоремою Нікодима [5, теор. 1.2.18] міра ν визначена коректно.

Візьмемо множину $A \in \mathcal{B}(M)$, $A \subset K_n$ при деякому $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$\nu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu_{m+2}\big(A \cap (K_m \backslash K_{m-1})\big) = \sum_{m=1}^{n} \nu_{m+2}\big(A \cap (K_m \backslash K_{m-1})\big) = \\ = \sum_{m=1}^{n} \nu_{n+2}\big(A \cap (K_m \backslash K_{m-1})\big) = \nu_{n+2}(A \cap K_n) = \nu_{n+2}(A).$$

Якщо при цьому A є підмножиною K_{n-1}, то $\Phi_s(A) \subset K_n$ для всіх $s \in [0, t]$, тому, оскільки $\mu \big|_{K_{n+2}} = \mu_{n+2} \big|_{K_{n+2}}$, а міра μ_{n+2} диференційовна, то за теоремою 4.2 маємо рівність

$$\mu_t(A) - \mu(A) = \mu_{n+2}\big(\Phi_t(A)\big) - \mu_{n+2}(A) = \int_0^t \big(\nu_{n+2}\big)_s(A)\, ds = \\ = \int_0^t \nu_{n+2}\big(\Phi_s(A)\big)\, ds = \int_0^t \nu\big(\Phi_s(A)\big)\, ds = \int_0^t \nu_s(A)\, ds. \tag{4.17}$$

Доведемо тепер, що для кожного $t \in J$ і кожного $A \in \mathcal{A}$ мають місце збіжності:

$$\mu_t(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_t\big(A \cap K_n\big), \qquad \nu_t(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_t\big(A \cap K_n\big),$$

причому обидві збіжності є рівномірними по $A \in \mathcal{A}$. Перша рівність:

$$\big|\mu_t(A) - \mu_t(A \cap K_n)\big| = \big|\mu_t(A \backslash K_n)\big| = \Big|\mu\big(\Phi_t(A) \backslash \Phi_t(K_n)\big)\Big| \leqslant \\ \leqslant |\mu|\big(\Phi_t(A) \backslash \Phi_t(K_n)\big) \leqslant |\mu|(M \backslash K_{n-1}) < \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Друга:

$$\big|\nu_t(A) - \nu_t(A \cap K_n)\big| = \Big|\nu\big(\Phi_t(A) \backslash \Phi_t(K_n)\big)\Big| = \\ = \Bigg|\sum_{m=1}^{\infty} \nu_{m+2}\Big(\big(\Phi_t(A) \backslash \Phi_t(K_n)\big) \cap (K_m \backslash K_{m-1})\Big)\Bigg|.$$

Але для всіх $n \in \mathbb{N}$ при $k \leqslant n-1$ має місце включення $K_k \subset \Phi_t(K_n)$, тому множина $\big(\Phi_t(A)\backslash\Phi_t(K_n)\big) \cap (K_m\backslash K_{m-1})$ є непустою лише при $m \geqslant n$. Тоді:

$$\big|\nu_t(A) - \nu_t(A \cap K_n)\big| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |\nu_{m+2}|(K_m\backslash K_{m-1})$$

— прямує до 0, оскільки ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\nu_{m+2}|(K_m\backslash K_{m-1})$ збігається.

Отже, для кожного $A \in \mathcal{A}$ і кожного $t \in J$ справджується рівність:

$$\mu_t(A) - \mu(A) = \lim_{n\to\infty}\Big(\mu_t\big(A \cap K_n\big) - \mu\big(A \cap K_n\big)\Big) = [\text{рівн. (4.17)}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t \nu_s(A \cap K_n)\,ds = \int\limits_0^t \lim_{n\to\infty}\nu_s(A \cap K_n)\,ds = \int\limits_0^t \nu_s(A)\,ds.$$

Зрозуміло, що тоді отримана рівність виконується і для всіх $t \in \mathbb{R}$ (достатньо записати t у вигляді суми $t = m\gamma + \delta$, де $m \in \mathbb{Z}$, $|\delta| < \gamma$, m і δ одного знаку з t).

Отримали умову 2 теореми 4.2 для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $t \in \mathbb{R}$. Отже, міра μ є диференційовною за Скороходом уздовж X, а її слабкою похідною є міра ν.

Те, що міра ν є радонівською, випливає з того, що $\nu(A \cap K_n)$ рівномірно по A з $\mathcal{A}$ збігається до $\nu(A)$, а тому $|\nu|\big(M\backslash K_n\big)$ прямує до нуля і міра ν є щільною. З урахуванням того, що кожна борелівська міра є регулярною, отримуємо радоновість міри ν. ■

При доведенні умови достатності теореми 4.3 було показано не тільки те, що міра μ є диференційовною вздовж векторного поля X, але і те, що слабка похідна міри μ є радонівською мірою. Таким чином має місце наступний наслідок.

Наслідок 4.5. *Якщо радонівська міра μ диференційовна за Скороходом вздовж векторного поля X, то її слабка похідна також радонівська.*

4.4.2 Доведення критерію для випадку банахового многовиду з рівномірною структурою

Теорема 4.4. *Нехай банахів многовид M з рівномірним атласом $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ допускає розбиття одиниці класу C^1, X — векторне поле класу $C_b^1(M)$, μ — знакозмінна скінченна радонівська міра на $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M)$. Тоді міра μ диференційовна за Скороходом вздовж X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожного $A \in \mathcal{A}$ існує $c(A)$ таке, що:*

$$\big|\mu_t(A) - \mu(A)\big| \leqslant c(A)\,|t|, \qquad \forall t \in [-\gamma, \gamma]. \tag{4.18}$$

Доведення.

$\Longrightarrow$: Повторює доведення відповідної частини теореми 4.3.

$\Longleftarrow$: Нехай міра μ така, що виконується умова (4.18). За лемою 4.3 ця умова рівносильна тому, що існує константа $C > 0$, така, що для всіх $t \in [-\gamma, \gamma]$ виконується нерівність

$$\|\mu_t - \mu\| \leqslant C \cdot |t|.$$

Випадок 1: Міра μ має компактний носій S. Нехай r — константа з означення рівномірного атласу для Ω, а L — константа з означення обмеженого векторного поля для X. За лемою 4.1 будуємо підатлас $\big\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$, де

$$V_\alpha = \Big\{x \in U_\alpha \mid \overline{B}^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(x)\big) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)\Big\}^0,$$

і при цьому $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ для кожного α. Крім того, при $a = \min\left\{\dfrac{r}{6}, \dfrac{1}{2}\right\}$, $b < \dfrac{a}{\big(\max\{L, 1\}\big)^2}$ для кожного α потік Φ^α є визначеним на $(-b, b) \times B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big)$ і набуває значень в $B^E_{\frac{r}{2}}\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big) \subset \varphi(U_\alpha)$. Візьмемо b також меншим за γ і позначимо через I_b проміжок $(-b, b) \subset \mathbb{R}$, $\overline{I_b} = [-b, b]$.

Для кожної карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ введемо такі позначення:

$$W_\alpha = B^E_{\frac{a}{2}}\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big), \qquad T_\alpha = B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big).$$

При цьому $\overline{W}_\alpha \subset B^E_a\big(\varphi_\alpha(V_\alpha)\big) = T_\alpha \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, і на $I_b \times T_\alpha$ визначено потік Φ^α. Легко показати, що для кожного α має місце також включення $\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha) \subset W_\alpha$.

Міра μ зосереджена на компакті S. Оскільки Φ є неперервним відображенням, множина $K = \Phi\big(\overline{I_b} \times S\big)$ також компактна, і для кожного $t \in I_b$ міра μ_t зосереджена на $\Phi_{-t}(S) \subset K$.

Компактною є також множина $\widetilde{K} = \Phi(\overline{I_b} \times K)$, тому існує така скінченна підмножина P множини індексів $\{\alpha\}$, що $\widetilde{K}$ покривається множинами $\big\{V_j \mid j \in P\big\}$. Розглянемо відкрите покриття $\big\{V_j \mid j \in P\big\} \cup \big\{V_\alpha \backslash \widetilde{K} \mid \alpha \notin P\big\}$ многовиду M і візьмемо таке розбиття одиниці $\{h_\alpha\}$ класу C^1 (це можливо, скільки M допускає C^1-розбиття одиниці), що при $\alpha \in P$: $\operatorname{supp} h_\alpha \subset V_\alpha$, і при $\alpha \notin P$: $\operatorname{supp} h_\alpha \subset V_\alpha \backslash \widetilde{K}$. При цьому для кожного $x \in \widetilde{K}$ виконується рівність

$$\sum_\alpha h_\alpha(x) = \sum_{\alpha \in P} h_\alpha(x) = 1.$$

Взявши $\overline{I_b}$ в якості відрізку J і повторивши першу частину доведення відповідної частини теореми 4.3, одержуємо таку послідовність $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ з $\overline{I_b} \backslash \{0\}$ та міру ν на $\mathcal{B}(M)$ з носієм на K і з $\|\nu\| \leqslant C$, для яких виконується умова:

$$\forall f \in C^{\mathbb{C}}_b(K): \quad \int\limits_K f\, d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_K f\, d\nu. \tag{4.19}$$

Розглянемо образи міри ν в картах: для кожного $\alpha \in P$ визначаємо міру $\nu^\alpha = \nu_{\big|U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ на $\mathcal{B}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha)\big)$, при цьому носій ν^α зосереджений на $\varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$.

Зафіксуємо деяку карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ при $\alpha \in P$ і введемо до розгляду міри m^α_t, $t \in I_b$, на $\mathcal{B}(T_\alpha)$, що є образами мір $\mu_{t\big|\varphi_\alpha^{-1}(T_\alpha)}$ при відображенні φ_α, тобто для кожної множини $A \in \mathcal{B}(T_\alpha)$:

$$m_t^\alpha(A) = \mu_t\big(\varphi_\alpha^{-1}(A)\big) = \mu\Big(\Phi_t\big(\varphi_\alpha^{-1}(A)\big)\Big) = \mu\Big(\varphi_\alpha^{-1}\big(\Phi_t^\alpha(A)\big)\Big),$$
$$m^\alpha(A) = m_0^\alpha(A) = \mu\big(\varphi_\alpha^{-1}(A)\big).$$

При цьому, оскільки для кожного $t \in I_b$ міра μ_t зосереджена на множині $\Phi_{-t}(S)$, то міра m_t^α зосереджена на множині $T_\alpha \cap \varphi_\alpha\big(U_\alpha \cap \Phi_{-t}(S)\big) \subset \subset T_\alpha \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap K)$.

Нехай $\widetilde{f}$ — функція з $C_b^{\mathbb{C}}\big(\overline{W}_\alpha \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)\big)$, причому $\widetilde{f}$ приймає нульове значення на $(\overline{W}_\alpha \backslash W_\alpha) \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$. Тоді відповідна функція $f = \widetilde{f} \circ \varphi_\alpha$ на $\varphi_\alpha^{-1}(\overline{W}_\alpha) \cap K$ дорівнює нулю на $\varphi_\alpha^{-1}(\overline{W}_\alpha \backslash W_\alpha) \cap K$, і її можна неперервно довизначити нулем на весь компакт K. Отримана таким чином функція F належить до класу $C_b^{\mathbb{C}}(K)$, тому для неї справедлива умова (4.19). Враховуючи, що F приймає нульове значення за межами множини $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap K$, і повертаючись до карти, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\varphi_\alpha(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{f}\, d\left(\frac{m_{t_n}^\alpha - m^\alpha}{t_n}\right) = \int\limits_{\varphi_\alpha(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{f}\, d\nu^\alpha. \tag{4.20}$$

Отже, для будь-якої функції $\widetilde{f} \in C_b^{\mathbb{C}}\big(\overline{W}_\alpha \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)\big)$, що приймає нульове значення на $(\overline{W}_\alpha \backslash W_\alpha) \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$, справедлива рівність (4.20).

Покажемо, що існує таке $t_\alpha \in I_b$, що $\Phi_t(\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ для всіх $t \in (-t_\alpha, t_\alpha)$. Нехай це не так. Тоді існує послідовність $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ і послідовність $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha$ такі, що $\Phi(\tau_n, y_n) \notin \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Завдяки компактності $\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha$ існує підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, збіжна до деякого $y^* \in \widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha$. Відображення Φ є неперервним на $\mathbb{R} \times M$, тому $\Phi(\tau_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \Phi(0, y^*) = y^* \in \overline{V}_\alpha$. Але $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ — відкрита множина, тому оскільки $\Phi(\tau_{n_k}, y_{n_k}) \notin \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ при всіх k, то і границя $y^* \notin \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Отримали суперечність з включенням $\overline{V}_\alpha \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Отже, шукане t_α існує.

Позначимо через I_α проміжок $(-t_\alpha, t_\alpha)$, тоді

$$\Phi\big(I_\alpha \times (\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha)\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha). \tag{4.21}$$

Нехай l — дійснозначний обмежений лінійний функціонал на E. Для кожного $s \in I_\alpha$, розглянемо функцію $\widetilde{\psi}_s \colon T_\alpha \cap \varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap U_\alpha) \to \mathbb{C}$:

$$\widetilde{\psi}_s(x) = \exp\Big(i\, l\big(\Phi^\alpha_{-s}(x)\big)\Big)\, (h_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})\big(\Phi^\alpha_{-s}(x)\big).$$

Оскільки $\operatorname{supp} h_\alpha \subset V_\alpha$, функція $\widetilde{h}_\alpha = h_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ є нульовою за межами $\varphi_\alpha(V_\alpha)$. Зафіксуємо деяке $s \in I_\alpha$, тоді функція $\widetilde{\psi}_s$ є нульовою за межами $\varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$. Розглянемо звуження функції $\widetilde{\psi}_s$ на множину $\overline{W}_\alpha \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$. Оскільки $s \in I_\alpha$, із включення (4.21) маємо:

$$K \cap \Phi_s(V_\alpha) = \Phi_s\big(\Phi_{-s}(K) \cap V_\alpha\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha).$$

Тому, якщо $x \in (\overline{W}_\alpha \backslash W_\alpha) \cap \varphi_\alpha(K \cap U_\alpha)$, то $x \notin \varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$ і $\widetilde{\psi}_s(x) = 0$. Тоді для функції $\widetilde{\psi}_s$ справедлива рівність (4.20). Оскільки $s + t_n \in I_\alpha$ при n, більших за деяке N, із включення (4.21) одержуємо:

$$\Phi_s\big(\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha), \tag{4.22а}$$

$$\Phi_{s+t_n}\big(\widetilde{K} \cap \overline{V}_\alpha\big) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha), \quad \forall n > N. \tag{4.22б}$$

Розпишемо функціонали з лівої частини рівності (4.20) для функції $\widetilde{\psi}_s$:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\varphi_\alpha\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi}_s \, d\left(\frac{m^\alpha_{t_n} - m^\alpha}{t_n}\right) = \int\limits_{K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} \widetilde{\psi}_s \circ \varphi_\alpha \, d\left(\frac{\mu_{t_n} - \mu}{t_n}\right) = \\ = \frac{1}{t_n}\left[\int\limits_{\Phi_{t_n}\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi}_s \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t_n}\, d\mu - \int\limits_{K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} \widetilde{\psi}_s \circ \varphi_\alpha \, d\mu\right].\end{gathered} \tag{4.23}$$

Міра μ зосереджена на S, тому в другому інтегралі можемо звузити множину інтегрування до $S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$. Перетворимо тепер і перший інтеграл при $n > N$. Оскільки $\operatorname{supp} \widetilde{\psi}_s \subset \varphi_\alpha\bigl(\Phi_s(V_\alpha)\bigr)$, то $\operatorname{supp}(\widetilde{\psi}_s \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t_n}) \subset \Phi_{s+t_n}(V_\alpha)$, і множину інтегрування можна замінити її перетином з $\Phi_{s+t_n}(V_\alpha)$, що рівний $\Phi_{s+t_n}\bigl(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\bigr)$ (оскільки $\Phi_s\bigl(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\bigr) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ за умовою (4.22а)). Помітимо тепер, що $\widetilde{\psi}_s \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t_n} = \widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha$ на множині, де обидві частини мають зміст. Оскільки $\Phi_{s+t_n}\bigl(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\bigr) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ при $n > N$, вказана рівність справедлива і на множині $\Phi_{s+t_n}\bigl(V_\alpha \cap \Phi_{-s}(K)\bigr)$, отже, перший інтеграл можна брати з підінтегральною функцією $\widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha$. Врахуємо тепер, що міра μ зосереджена на S, і звузимо множину $\Phi_{t_n}(K)$ до S. І нарешті, оскільки функція $\widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha$ нульова ззовні множини $\Phi_{s+t_n}(V_\alpha)$, знову використавши включення (4.22б), розширюємо множину $\Phi_{s+t_n}(V_\alpha) \cap S$ до множини $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap S$, на якій підінтегральна функція також має зміст. Таким чином, рівність (4.23) при $n > N$ перетворюється у таку:

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi}_s \, d\left(\frac{m_{t_n}^\alpha - m^\alpha}{t_n}\right) = \frac{1}{t_n}\left[\int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap S} \widetilde{\psi_{s+t_n}} \circ \varphi_\alpha \, d\mu - \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \cap S} \widetilde{\psi}_s \circ \varphi_\alpha \, d\mu\right] =$$

$$= \frac{1}{t_n} \int\limits_{S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} (\widetilde{\psi_{s+t_n}} - \widetilde{\psi}_s) \circ \varphi_\alpha \, d\mu = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \frac{\widetilde{\psi_{s+t_n}} - \widetilde{\psi}_s}{t_n} \, dm^\alpha. \tag{4.24}$$

Функції $\widetilde{\psi_u}(x)$ при кожному фіксованому $x \in T_\alpha \cap \varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap U_\alpha)$ є диференційовними по u на I_α і при цьому для кожного $p \in I_\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=p} \widetilde{\psi_u}(x) = -\exp\Bigl(i\, l\bigl(\Phi_{-p}^\alpha(x)\bigr)\Bigr) \cdot$$
$$\cdot \left[i\, \widetilde{h_\alpha}\bigl(\Phi_{-p}^\alpha(x)\bigr)\, l\Bigl(X_\alpha\bigl(\Phi_{-p}^\alpha(x)\bigr)\Bigr) + \widetilde{h_\alpha}'\bigl(\Phi_{-p}^\alpha(x)\bigr)\, X_\alpha\bigl(\Phi_{-p}^\alpha(x)\bigr)\right].$$

Тоді для кожного $x \in \varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$ має місце збіжність

$$\left(\frac{\widetilde{\psi_{s+t_n}} - \widetilde{\psi}_s}{t_n}\right)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \widetilde{\psi_u}(x),$$

і крім того, при всіх $n > N$ виконується нерівність:

$$\left|\left(\frac{\widetilde{\psi_{s+t_n}} - \widetilde{\psi}_s}{t_n}\right)(x)\right| \leqslant \sup_{\xi\in I_\alpha}\left|\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=\xi} \widetilde{\psi_u}(x)\right| \leqslant \|l\| \cdot L + \max_{z\in A}\big\|\widetilde{h_\alpha}'(z)\big\| \cdot L,$$

де $A = \Phi^\alpha\Big(\overline{I_\alpha} \times \varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(\overline{W}_\alpha)\big)\Big)$ — компакт, а тому вказаний максимум існує. Отже, за теоремою Лебега з рівності (4.24) маємо:

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi}_s\, d\left(\frac{m^\alpha_{t_n} - m^\alpha}{t_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \widetilde{\psi_u}(x)\, m^\alpha(dx).$$

З іншого боку, врахувавши умову (4.20) для функції ψ_s, отримуємо рівність:

$$\int\limits_{\varphi_\alpha\left(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \widetilde{\psi_u}(x)\, m^\alpha(dx) = \int\limits_{\varphi_\alpha\left(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)} \widetilde{\psi}_s\, d\nu^\alpha. \tag{4.25}$$

Оскільки ми брали довільне $s \in I_\alpha$, рівність (4.25) виконується для всіх $s \in I_\alpha$. Для кожного $x \in \varphi_\alpha\big(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$ функція $\psi_s(x)$ є неперервною по s на I_α, і крім того всюди на області визначення: $\big|\psi_s(x)\big| \leqslant 1$. Тоді за теоремою Лебега права частина рівності (4.25) є неперервною на I_α, а тому інтегровною відносно міри Лебега λ.

Функція $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{u=s} \widetilde{\psi_u}(x)$ є неперервною за сукупністю аргументів на множині $I_\alpha \times \varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$, а тому інтегровною відносно міри $\lambda \otimes m^\alpha$, де λ — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Тому за теоремою Фубіні [8, т. 1, с. 219] можна коректно проінтегрувати ліву частину виразу (4.25) на проміжку $[0, t]$ при кожному $t \in I_\alpha$, і при цьому замінити порядок інтегрування. Таким чином, проінтегрувавши обидві частин рівності (4.25), для кожного $t \in I_\alpha$ отримуємо рівність:

$$\int_0^t \int_{\varphi_\alpha(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{\psi}_s \, d\nu^\alpha \, ds = \int_{\varphi_\alpha(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{\psi_t} \, dm^\alpha - \int_{\varphi_\alpha(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{\psi_0} \, dm^\alpha. \tag{4.26}$$

Перетворимо тепер перший інтеграл правої частини останньої рівності. Врахувавши, що $\operatorname{supp}\widetilde{\psi_t} \subset \varphi_\alpha\big(\Phi_t(V_\alpha)\big)$ при кожному $t \in I_\alpha$, множину інтегрування звужуємо до множини

$$\varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big) \cap \varphi_\alpha\big(\Phi_t(V_\alpha)\big) = \varphi_\alpha\big(\Phi_t(V_\alpha) \cap S)\big)$$

(оскільки $\Phi_t(V_\alpha) \cap S) \subset \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ за умовою (4.22а)). Тоді перший інтеграл перетворюється:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_\alpha(S\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{\psi_t} \, dm^\alpha &= \int_{\varphi_\alpha(\Phi_t(V_\alpha)\cap S))} \widetilde{\psi_t} \, dm^\alpha = \int_{\Phi_t(V_\alpha)\cap S} \widetilde{\psi_0} \circ \varphi_\alpha \circ \Phi_{-t} \, d\mu = \\ &= \int_{V_\alpha \cap \Phi_{-t}(S)} \widetilde{\psi_0} \circ \varphi_\alpha \, d\mu_t = \int_{\varphi_\alpha(V_\alpha\cap\Phi_{-t}(S))} \widetilde{\psi_0} \, dm_t^\alpha = \int_{\varphi_\alpha(V_\alpha\cap K)} \widetilde{\psi_0} \, dm_t^\alpha. \end{aligned}$$

(остання рівність випливає з того, що міра μ_t зосереджена на $\Phi_{-t}(S)$).

Аналогічно і в другому інтегралі правої частини рівності (4.26) множину інтегрування можемо спочатку звузити до $\varphi_\alpha\big(S \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big) \cap \varphi_\alpha(V_\alpha) = \varphi_\alpha(S \cap V_\alpha)$, оскільки $\operatorname{supp}\widetilde{\psi_0} \subset \varphi_\alpha(V_\alpha)$, а потім розширити до $\varphi_\alpha(V_\alpha \cap K)$, оскільки μ зосереджена на S.

Таким чином отримуємо рівність для всіх $t \in I_\alpha$:

$$\int_0^t \int_{\varphi_\alpha(K\cap\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{\psi}_s \, d\nu_\alpha \, ds = \int_{\varphi_\alpha(V_\alpha\cap K)} \widetilde{\psi_0} \, d(m_t^\alpha - m^\alpha). \tag{4.27}$$

Перетворимо тепер ліву частину рівності (4.27). Врахуємо спочатку, що при кожному $s \in [0, t] \subset I_\alpha$ носій $\widetilde{\psi}_s$ зосереджений на $\varphi_\alpha\big(\Phi_s(V_\alpha)\big)$ і

$\varphi_\alpha\big(K \cap \Phi_s(V_\alpha)\big) \subset \varphi_\alpha\big(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha)\big)$ за умовою (4.22а). Тому у внутрішніх інтегралах можемо звузити множини інтегрування до $\varphi_\alpha\big(K \cap \Phi_s(V_\alpha)\big)$ і при цьому замінити підінтегральну функцію функцією $\widetilde{\psi_0} \circ \Phi^\alpha_{-s}$.

Розглядаємо зсуви міри ν^α вздовж векторного поля X_α на множині $\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)$, тобто для кожного $s \in I_\alpha$ вводимо до розгляду міру $\nu_s^\alpha = \nu^\alpha\big|_{\Phi_s^\alpha(\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha))} \circ \Phi_s^\alpha$ на $\mathcal{B}\big(\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)\big)$ з носієм на $\varphi_\alpha\big(\Phi_{-s}(K) \cap V_\alpha\big)$. Тоді у внутрішніх інтегралах перейдемо також до мір ν_s^α:

$$\int_0^t \int_{\varphi_\alpha(K \cap \varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha))} \widetilde{\psi}_s \, d\nu^\alpha \, ds = \int_0^t \int_{\varphi_\alpha(\Phi_{-s}(K) \cap V_\alpha)} \widetilde{\psi_0} \, d\nu_s^\alpha \, ds = \int_0^t \int_{\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)} \widetilde{\psi_0} \, d\nu_s^\alpha \, ds.$$

Отже, враховуючи умову (4.27), остаточно отримуємо рівність

$$\int_0^t \int_{\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)} \widetilde{\psi_0} \, d\nu_s^\alpha \, ds = \int_{\varphi_\alpha(V_\alpha \cap K)} \widetilde{\psi_0} \, d(m_t^\alpha - m^\alpha) \qquad \forall t \in I_\alpha. \tag{4.28}$$

Зафіксуємо тепер деяке число $t \in I_\alpha$ і розглянемо для нього клас функцій $N = \text{л.о.}\big\{\exp\big(i\,l(x)\big) \mid l \in M^*\big\}$ над полем $\mathbb{C}$, який є підмножиною класу $C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})\big)$. Оскільки рівність (4.28) виконується для функції $\widetilde{\psi_0}(x) = \exp\big(i\,l(x)\big)\,\widetilde{h_\alpha}(x)$ при довільному виборі функціоналу $l \in E^*$, отримуємо, що для кожної функції f з класу N виконується рівність

$$\int_0^t \int_{\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)} f\,\widetilde{h_\alpha} \, d\nu_\alpha^s \, ds = \int_{\varphi_\alpha(K \cap V_\alpha)} f\,\widetilde{h_\alpha} \, d(m_t^\alpha - m^\alpha). \tag{4.29}$$

Клас N є підалгеброю класу $C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})\big)$ комплекснозначних неперервних функцій на компакті $\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})$ в E. При цьому він містить одиничну функцію, а для кожної функції $f \in N$ функція $\overline{f}$ також належить N. Крім того, N розділяє точки простору $\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})$. Тоді за теоремою Стоуна-Вейєрштрасса [25, с. 160] множина N є щільною в $C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})\big)$. Тому, використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, граничним переходом отримуємо, що для всіх функцій $f \in C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})\big)$ і всіх $t \in I_\alpha$ виконується рівність (4.29).

Аналогічні міркування можна провести для всіх карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$ при $\alpha \in P$. Тобто для кожного $\alpha \in P$ існує число $t_\alpha \in I_b$ таке, що для всіх функцій $f \in C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_\alpha(\overline{V}_\alpha \cap \widetilde{K})\big)$ і для всіх $t \in I_\alpha$ виконується рівність (4.29), де $\nu_\alpha^s = \nu_\alpha\big|_{\Phi_s^\alpha\left(\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)\right)} \circ \Phi_s^\alpha$ – міри на $\mathcal{B}\big(\varphi_\alpha(\widetilde{K} \cap V_\alpha)\big)$ з носіями на $\varphi_\alpha\big(\Phi_{-s}(K) \cap V_\alpha\big)$, які визначаються як зсуви міри ν_α вздовж векторного поля X_α на $s \in I_\alpha$.

Розглянемо $\tau = \min\{t_\alpha \mid \alpha \in P\}$. Введемо при $s \in (-\tau, \tau)$ міри $\nu_s = \nu \circ \Phi_s$ на $\mathcal{A}$. Тоді для кожної функції $f \in C_b(M)$ і для кожного $t \in (-\tau, \tau)$ маємо:

$$\int\limits_M f\, d(\mu_t - \mu) = \int\limits_K f\, d(\mu_t - \mu) = \sum_{j \in P} \int\limits_{K \cap V_j} h_j f\, d(\mu_t - \mu) =$$

$$= \sum_{j \in P} \int\limits_{\varphi_j(K \cap V_j)} (f \circ \varphi_j^{-1}) \cdot \widetilde{h}_j\, d(m_t^j - m^j) = \begin{bmatrix} \text{рівн. (4.29) для} \\ f \circ \varphi_j^{-1} \in C_b^{\mathbb{C}}\big(\varphi_j(\overline{V_j} \cap \widetilde{K})\big) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j \in P} \int\limits_0^t \int\limits_{\varphi_j(\widetilde{K} \cap V_j)} (f \circ \varphi_j^{-1}) \cdot \widetilde{h}_j\, d\nu_s^j\, ds =$$

$$= \sum_{j \in P} \int\limits_0^t \int\limits_{\Phi_s^j(\varphi_j(\widetilde{K} \cap V_j))} (f \circ \varphi_j^{-1} \circ \Phi_{-s}^j) \cdot (\widetilde{h}_j \circ \Phi_{-s}^j)\, d\nu^j\, ds = \big[\nu^j = \nu\big|_{U_j} \circ \varphi_j^{-1}\big] =$$

$$= \sum_{j \in P} \int\limits_0^t \int\limits_{\Phi_s(\widetilde{K} \cap V_j)} (f \circ \Phi_{-s}) \cdot (h_j \circ \Phi_{-s})\, d\nu\, ds = \sum_{j \in P} \int\limits_0^t \int\limits_{\widetilde{K} \cap V_j} f \cdot h_j\, d\nu_s\, ds =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{supp} h_j \subset V_j \\ \sum\limits_j h_j = 1 \text{ на } \widetilde{K} \end{bmatrix} = \int\limits_0^t \int\limits_{\widetilde{K}} f\, d\nu_s\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f\, d\nu_s\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_M f \circ \Phi_{-s}\, d\nu\, ds.$$

Отримали рівність (4.4) для всіх $f \in C_b(M)$ і для всіх $t \in (-\tau, \tau)$. Щоб отримати цю рівність для $t, |t| \geqslant \tau$ запишемо t у вигляді $t = k\dfrac{\tau}{2} + \delta$, де $k \in \mathbb{Z}$, $|\delta| < \dfrac{\tau}{2}$ і одного знаку з t, і використати попередній результат для функцій

$f \circ \Phi_{-p\frac{\tau}{2}}$, $0 \leqslant p \leqslant |k|$.

Отже, рівність (4.4) виконується для всіх $f \in C_b(M)$ і всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді за теоремою 4.2 міра μ диференційовна за Скороходом вздовж X, а ν — її слабка похідна. При цьому, як і в теоремі 4.3, ν зосереджена на компакті S і якщо C — константа, така, що для кожного дійсного t виконується нерівність $\|\mu_t - \mu\| \leqslant C \cdot |t|$, то $\|\nu\| \leqslant C$.

Випадок 2: Міра μ довільна. Доведення цього випадку повністю аналогічне доведенню випадку 2 теореми 4.3. ■

Аналогічно теоремі 4.3 при доведенні умови достатності теореми 4.4 було показано не тільки те, що міра μ є диференційовною вздовж векторного поля X, але і те, що слабка похідна міри μ є радонівською мірою. Таким чином має місце наступний наслідок.

Наслідок 4.6. *Якщо на банаховому многовиді з рівномірним атласом M, що допускає розбиття одиниці класу C^1, радонівська міра μ диференційовна за Скороходом уздовж обмеженого векторного поля X, то її слабка похідна також радонівська.*

Лема 4.3 дає змогу сформулювати ще один наслідок.

Наслідок 4.7. *В умовах теореми 4.4 міра μ є диференційовною за Скороходом уздовж векторного поля X в тому і тільки тому разі, коли існує таке число $\gamma > 0$, що для кожної функції $f \in C_b(M)$ існує число $d(f) > 0$ таке, що для всіх $t \in [-\gamma, \gamma]$ виконується нерівність*

$$\left|\int\limits_M (f \circ \Phi_{-t} - f)\, d\mu\right| \leqslant d(f) \cdot |t|.$$

Іншими словами, показали, що якщо для кожної функції $f \in C_b(M)$ функція $t \mapsto \int_M f \circ \Phi_{-t}\, d\mu$ задовольняє умову Ліпшиця на деякому проміжку $[-\gamma, \gamma]$, то всі такі функції диференційовні.

4.5 Висновки за розділом

У даному розділі розглянуто поняття неперервності та диференційовності борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Отримано узагальнення низки результатів з класичної теорії, яка ґрунтується на зсувах мір вздовж постійних напрямків, на випадок зсувів вздовж інтегральних кривих векторних полів. Виявлено, що для диференційовності за Фоміним практично всі результати, які стосуються диференційовносі за напрямком, цілком природно і без суттєвих складностей узагальнюються на випадок диференційовності вздовж векторного поля. Менш тривіальними є узагальнення результатів, що стосуються диференційовності за Скороходом. Основним результатом розділу є критерій слабкої диференційовності міри уздовж векторних полів. Отримано також формулу інтегрування частинами, в якій похідна переноситься з функції на міру.

Основні результати даного розділу опубліковано в роботі [34].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню борелівських мір на банахових многовидах з обмеженою структурою. Основні результати роботи:

1. Отримано узагальнення критерію слабкої диференційовності за напрямком В.І. Богачова для випадку диференційовності уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою.
2. Запроваджено поняття асоційованої диференціальної форми та строго трансверсального набору векторних полів для поверхонь скінченної корозмірності, що вкладені у банахові многовиди з обмеженою структурою.
3. Запропоновано метод побудови асоційованих поверхневих мір першого та другого типів. Виявлено достатні умови існування відповідної поверхневої міри.
4. Доведено теорему "про узгодженість", тобто однозначність задання поверхневої міри другого типу асоційованою диференціальною формою, незалежно від набору векторних полів, використаних при побудові.
5. Показано транзитивність асоційованих поверхневих мір. Показано, що при подвійному вкладенні поверхні S у многовид M (S вкладена у Σ, що в свою чергу вкладена у M) безпосередня побудова поверхневої міри на S при розгляді її вкладення в M призводить до того ж результату, що і двоетапна побудова через поверхневу міру на Σ.
6. Обґрунтовано адекватність запропонованої конструкції на прикладі скінченновимірного простору та ріманова многовиду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1971. — т. 24. — С. 133–174.
2. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1972. — т. 27. — С. 247–262.
3. Березанский Ю. М., Шефтель З. Г., Ус Г. Ф. Функциональний анализ. Курс лекций: учеб. пособ. — К. : Выща школа, 1990. — 600 с.
4. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений // Успехи метематических наук. — 1990. — т. 45. — вып. 3(273). — С. 3–83.
5. Богачев В. И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. — М.; Ижевск: Регулярная и хаотичная динамика, 2008. — 544 с.
6. Богачев В. И. О дифференцируемости мер по Скороходу // Теория вероятностей и ее применения. — 1988. — вып. 2. — С. 348–354.
7. Богачев В. И. Пренебрежимые множества в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. — 1984. — т. 36, № 1. — С. 51–64.
8. Богачев В. И. Основы теории меры : в 2 т. / В. И. Богачев. — М.–Ижевск : Регулярная и хаотичная динамика, 2003.
9. Богданский Ю. В. Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского // Укр. мат. журн. — 2012. — т. 64, № 10. — С. 1299–1313.
10. Богданський Ю. В. Бездивергентний варіант формули Гаусса-Остроградського на нескінченновимірних многовидах // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2008, № 4. — С. 132–138.

11. Богданский Ю. В. Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. — 2015. — т. 67, № 11. — С. 1450–1460.

12. Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю. Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. — 2014. — т. 66, № 6. — С. 733-–739.

13. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 8. — С. 1030–1048.

14. Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року, Київ : НТУУ “КПІ”, 2017. т. 1. С. 176–180.

15. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 10. — С. 1299–1309.

16. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь ; [пер. с франц. С. Н. Крачковского]. — М. : Наука, 1975. — 408 с.

17. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

18. Далецкий Ю. Л., Марянин Б. Д. Гладкие меры на бесконечномерных многообразиях // Доклады АН СССР — 1985. — т.285, № 6. — С. 1297–1300.

19. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973. — 188 с.

20. Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. — К.: Вища школа, 1989. — 295 с.

21. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М. : Наука, 1983. — 383 с.

22. Далецкий Ю. Л. Стохастическая дифференциальная геометрия // Успехи математических наук. — 1983. — т.38, № 3. — С. 87–111.

23. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы : в 3 т. Т. 1. Общая теория ; [пер. с англ. Л. И. Головиной, Б. С. Митягина]. — М. : Издательство иностранной литературы, 1962. — 895 с.

24. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. — К.: Факт, 2004. — 560 с.

25. Дьедонне Ж. Основы современного анализа ; [пер. с англ. И. А. Вайнштейна]. — М. : Мир. 1964. — 430 с.

26. Ефимова Е. И., Угланов А. В. Формулы векторного анализа на банаховых пространствах // Докл. АН СССР. — 1983. — т. 271, № 6. — С. 1302–1307.

27. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 640 с.

28. Икрамов Х. Д. Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 240 с.

29. Кириллов А. И. О восстановлении мер по их логарифмическим производным // Изв. РАН, сер. матем. — 1995. — т. 59. — вып. 1. — С. 121–138.

30. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

31. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М. : Мир, 1967. — 204 с.

32. Моравецкая Е. В. Слабая дифференцируемость борелевских мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації : матеріали Всеукраїнської заочної науково-практичної конференції “Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації”, м. Харків, 26–27 грудня 2016 року / Наукове партнерство “Центр наукових технологій”. — Харків : НП “ЦНТ”, 2016. С. 45–49.

33. Моравецька К. В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2017, № 4. — С. 66–72.

34. Моравецька К. В. Диференційовність борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою // Укр. мат. журн. — 2016. — т.68, № 10. — С. 1348–1364.

35. Моравецька К. В. Конструкція поверхневих мір на поверхнях, укладених у рімановi багатовиди з рівномірною структурою // Сист. досл. та інф. техн. — 2017, № 4. — С. 130–138.

36. Моравецька К. В. Критерій слабкої диференційовності мір вздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року, Київ : ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2014. с. 126.

37. Пугачев О. В. Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. — 2008. — т. 53, № 1. — С. 178–188.

38. Пугачев О. В. Формула Гаусса-Остроградского в бесконечномерном пространстве // Мат. сборник. — 1998. — т. 189, № 5. — С. 115–128.

39. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1975. — 231 с.

40. Смолянов О. Г. Анализ на топологических пространствах и его приложения. — М. : МГУ, 1979. — 89 с.

41. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в банаховых пространствах // Мат. сб. — 1979. — т. 110(152), № 2(10). — С. 189–217.

42. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сб. — 1998. — т. 189, № 11. — С. 139–157.

43. Фомин С. В. Дифференцируемые меры в линейных пространствах. Тезисы кратких научн. сообщ. Международного конгресса математиков: секция 5, М. : Изд-во МГУ, 1966. С. 78–79.

44. Фомин С. В. Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Успехи мат. наук. — 1968. — т. 23, № 2. — С. 221–222.

45. Фомин С. В. О некоторых новых результатах и проблемах в нелиниейном функциональном анализе // Вестник МГУ. — 1970. — № 2. — С. 57–65.

46. Шапошников А. В. Некоторые свойства соболевских функций на винеровском пространстве и их приложения : дис. ... кандидата физ.-мат. наук : 01.01.01. — Москва, 2014. — 52 с.

47. Bogachev V. I. Measure Theory : in 2 vol. Vol. 1. — Springer, 2006. — 500 p.

48. Bogachev V. I. Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces // Acta Univ. Carolinae. Math. et Phys. — 1990. — Vol. 31, № 2. — P. 9–23.

49. Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. — Springer, 2011. — 436 p.

50. Godman V. A. A divergence theorem fol Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 164. — pp. 411–426.

51. Kuo H.-H. Integration theory in infinite-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 159. — pp. 57–78.

52. Airault H., Malliavin P. Integration geometrique sur l’espace de Wiener // Bull. Scy. Math. (2) — 1988. — Vol. 112. — pp. 3–52.

53. Norin N. V. The extended stochastic integral in linear spaces with differentiable measures and related topics — World Scientific, 1996. — 257 p.

54. Smolyanov O. G., Weizsaecker H. Differentiable families of measures // Journal of Functional Analysis. — 1988. — Vol. 118. — pp. 454–476.

55. Smolyanov O. G., Weizsaecker H. Smooth probability measures and associated differential operators // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 1999. — Vol. 02. — Is. 01. — pp. 51–78.

56. Uglanov A. V. Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. — 262 p.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 наукових статей у фахових виданнях та 3 роботи у матеріалах наукових конференцій, дві з яких є міжнародними:

1. Моравецька К. В. Диференційовність борелівських мір уздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою // Укр. мат. журн. — 2016. — т.68, № 10. — С. 1348–1364.
2. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 8. — С. 1030–1048.
3. Богданский Ю.В., Моравецкая Е. В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. — 2017. — т. 69, № 10. — С. 1299–1309.
4. Моравецька К. В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2017, № 4. — С. 66–72.
5. Моравецька К. В. Конструкція поверхневих мір на поверхнях, укладених у ріманові багатовиди з рівномірною структурою // Сист. досл. та інф. техн. — 2017, № 4. — С. 130–138.
6. Моравецька К. В. Критерій слабкої диференційовності мір вздовж векторних полів на банахових многовидах з рівномірною структурою. Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року, Київ : ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2014. с. 126.
7. Моравецкая Е. В. Слабая дифференцируемость борелевских мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації : матеріали Всеукраїнської заочної

науково-практичної конференції “Національні наукові обрії: проблеми, перспективи, новації”, м. Харків, 26–27 грудня 2016 року / Наукове партнерство “Центр наукових технологій”. — Харків : НП “ЦНТ”, 2016. С. 45–49.

8. Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой. Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року, Київ : НТУУ “КПІ”, 2017. т. 1. С. 176–180.

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на наукових конференціях та семінарах:

1. Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, м. Київ, 7–10 жовтня 2017 року;
2. Шістнадцята міжнародна науково-технічна конференція SAIT 2014, м. Київ, 26–30 травня 2014 року;
3. конференція в рамках II туру Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з математичних наук, м. Івано-Франківськ, 20–22 березня 2014 року;
4. науковий семінар “Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник: проф. А.А. Дороговцев), 23 лютого 2016 року;
5. науковий семінар “Алгебра і аналіз” ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ” (керівник: проф. Ю. В. Богданський);